重庆文理学院学术专著出版资助项目

霍永亮 著

随机规划稳定性理论

SUIJI GUIHUA WENDINGXING LILUN



西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

随机规划稳定性理论

ISBN 978-7-5643-0525-3



定价：18.00元

重庆文理学院学术专著出版资助项目

随机规划稳定性理论

霍永亮 著

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

随机规划稳定性理论 / 霍永亮著. —成都：西南交通大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-5643-0525-3

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①霍… Ⅲ. ①随机规划－运动稳定性理论 Ⅳ. ①O221.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 237990 号

随机规划稳定性理论
霍永亮 著
*
责任编辑 张宝华
特邀编辑 顾 飞
封面设计 本格设计
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号 邮政编码: 610031
发行部电话: 028-87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蜀通印务有限责任公司印刷
*
成品尺寸: 148 mm×210 mm 印张: 5.437 5
字数: 197 千字
2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-0525-3
定价: 18.00 元

前　言

随机规划是融概率论、经典分析、数学规划于一体的新兴数学分支. 随机规划的稳定性是随机规划理论的重要组成部分和最活跃的研究方向之一. 鉴于某些随机规划的很多良好性质和结构，很有必要将其推广到更一般情形，进而讨论其最优解集的上半收敛性.

本书主要研究了非线性随机规划最优解集的稳定性. 全文共分 7 章，具体安排如下：第 1 章介绍了随机规划稳定性的背景及研究现状和预备知识；第 2 章研究了概率测度在集合序列不同收敛意义上的连续性以及弱收敛概率测度序列连续收敛性条件，并讨论了概率测度序列的弱收敛与上图收敛之间的关系；第 3 章证明了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理、控制收敛定理，给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件；第 4 章将积分泛函算子定义域中的无界且半连续函数空间扩张到更一般的可测函数空间，并在较弱的条件下证明了这种积分泛函算子的收敛定理、控制收敛定理及其推广形式的收敛定理、控制收敛定理，推广和改进了第 3 章的有关结果；第 5 章分别讨论了随机规划的期望模型、概率约束规划模型逼近最优解集序列的上半收敛性以及经验逼近模型逼近最优解集序列的几乎处处上半收敛性，并利用集值分析理论证明了随机规划最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性；第 6 章分别给出随机规划期望模型、概率约束规划模型、经验逼近模型 ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性，并讨论了随机约束规划逼近问题 ε-最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性；第 7 章将参数规划最优值函数的预不变凹凸性拓广为 $B-$预不变凹凸性，并讨论了最优值函数的 $B-$预不变凹性与其最优解集映射不变凸性之间的关系.

本书的主要工作是作者在攻读博士期间完成的，其中第6章是作者在博士毕业后完成的. 在攻读博士期间，导师刘三阳教授不仅在学术上给予我大力的支持、耐心的指导和热情的鼓励，而且在生活、工作上给予我无微不至的关怀和帮助，使得我能在一个良好的学术氛围中专注于自己的学业. 导师刘三阳教授严肃认真的治学态度，正直无私的人格品质，任劳任怨的奉献精神和不断进取的思想境界给我留下了深刻的印象，他的教诲和指导令我受益匪浅，终身难忘. 在此，我首先对刘三阳教授表达深深的敬意与感激！另外，还要衷心地感谢榆林学院书记慕锡凡教授，榆林学院校长苗润才教授，榆林学院副院长赵红星、王世平教授，弓炳耀教授，陕西省高速集团总经理助理叶普万教授，正是在他们的鼓励、支持和帮助之下，我才能够完成学业；还要感谢同窗好友綦明男、穆学文、李军、徐田华、郭渊博、王超、刘侍刚、李树、慕建君等博士，与他们的探讨也使我受益匪浅.

本书的出版得到了重庆文理学院学术专著出版基金项目的资助和重庆文理学院有关领导和同仁的支持和帮助，在此表示衷心的感谢. 由于水平有限，不当之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见，我们将进一步改进.

霍永亮

2009年7月

目　录

1 绪论与预备知识

本章首先介绍了随机规划稳定性概要及其研究现状；其次给出了在随机规划中经常用到的可测空间、度量空间与可分度量空间中随机元、概率测度弱收敛等基本概念以及概率测度弱收敛的等价条件.

1.1 随机规划稳定性研究的背景

在自然科学与工程技术的研究中，很多问题都可以归结为数学规划问题，如运输问题、经济利益最大问题、费用最小问题及路程最短问题等，而这些也都可以用数学规划去描述. 但在现实世界中，由于各种不确定因素的影响，数学规划中的系数经常会波动，而不是固定的已知数. 这时可能有三种情况出现：它们或者是具有已知概率分布的随机变量，或者是具有未知概率分布的随机变量，或者是其他类型的变量而不是随机变量. 这些不确定因素，在许多场合都可以用一定的概率分布去描述. 因此，在数学规划中引入随机变量，能够使建立的数学规划模型更加符合客观实际情况，从而使作出的决策更加合理，进而产生了非线性的各种随机规划，如单阶段随机约束规划、多阶段补偿规划、随机整数规划、随机动态规划、随机目标规划及以随机过程为参数的随机规划等问题.

如何求解这些随机规划问题是数学研究的一项重要任务. 由于

数学规划中引入了随机变量，从而导致随机规划问题数学期望中涉及的多重积分计算比较复杂，因此直接求解这些随机规划问题是相当困难的. 其最初的想法是将随机规划模型中的随机变量用它们的期望值代替，得到一个确定的数学规划模型，然后再用普通数学规划的各种算法去求解. 实际上，这种做法在很多时候并不可行，因此发展随机规划理论就显得非常必要. 王金德教授在他所撰写的随机规划一书中，首先提出求解随机规划问题的一种比较可行而有效的方法——逼近方法. 正是由于随机规划所采取的逼近方法是可行有效的，所得结论又具有广泛适用性，更切合实际，所以关于随机规划逼近理论研究一直是非线性随机规划的中心课题.

利用逼近方法求解这些非线性随机规划问题有两条途径：一条途径是在随机变量概率分布已知的情形下，采用某种离散化方法得到一系列（离散）随机变量序列，这些随机变量序列分布收敛于初始随机变量，从而将原问题转化为一系列确定性数学规划问题，或者转化为一系列以随机变量为参数的数学规划问题，并讨论这一系列的随机规划最优解集的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛问题；另一条途径就是在许多实际问题中,随机变量的概率分布是未知的，而只有几个样本点是已知的，因此这些样本点可以认为是随机变量的独立观测值,而这些样本点的观测值可以确定一个经验概率测度，再用经验概率测度替代原问题中随机变量所确定的概率测度，进而得到原问题的经验逼近模型.

为了保证逼近规划的解确为原问题的解的近似，上图收敛性提供了较好的理论基础. 上图收敛理论的优点在于对无约束的确定性规划问题而言，如果逼近规划问题的目标函数上图收敛到初始规划问题的目标函数，那么逼近规划问题的任意一个最优解组成的序列的聚点必为初始规划的一个最优解. 而对于含有约束的数学规划问题，通常都转化为与其等价的无约束规划问题，再利用上图收敛理论，解决逼近规划最优解集的收敛性问题.

通常所讨论的随机规划模型有三种：第一种是期望模型，即在期望约束条件下，使得目标函数的期望泛函达到最优；第二种是概

率约束模型，概率约束规划模型允许决策者作出的决策在一定程度上不满足约束条件，但该决策应该使得约束条件成立的概率不小于某一概率水平；第三种是经验逼近模型. 另一方面，按决策者所获得的信息可把随机规划问题大致分为两种类型：等待且看到模型和这里且现在模型. 所谓等待且看到模型，即决策者等待观测问题中随机变量的实现，然后利用这些实现的信息作出决策，分布问题就属于这种类型. 所谓这里且现在模型，即决策者必须在没有随机变量实现的信息的情形下就作出决策，如两阶段的补偿规划问题和概率约束规划问题.

1.2 随机规划稳定性研究的现状

随机规划的逼近和估计结果的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代 Kall 所做的工作和 Wets 关于随机规划的经验估计. Dupacova 和 Schultz 分别于 1900 年和 2000 年在各自的文章中均建立了随机规划稳定性的理论框架. 然而，关于随机规划稳定性的概念首先由 Bereanu 于 1975 年提出，接着 Kankova 于 1978 年首次给出了更一般化的随机规划模型关于概率测度弱收敛的稳定性研究. 随后，Dupacova 和王金德分别于 1984 年和 1985 年又研究了随机规划关于有限维概率分布为参数的稳定性. 这使得人们对随机规划稳定性的研究更感兴趣，国内外学者均采用逼近法（离散化随机变量）对随机规划稳定性的研究做了大量的工作，已有丰硕成果. 在诸多研究成果中，Robinon 和 Wets 于 1987 年对随机规划最优值和最优解集关于弱收敛概率测度稳定性的研究工作堪称是随机规划稳定性研究的经典之作. 关于这方面的重要的后续研究成果是 Artstein 和 Wets，Vogel，Schultz，Wang，Zervos，Riis 和 Schultz 等所做的工作. 与此同时，许多作者用概率测度之间的距离去刻画这些稳定性结果的数量关系，但是，用概率测度之间的距离去刻画这些稳定性结果的数量关系的工作首先是由 Romisch 于 1986 年初步尝试的.

对随机规划稳定性的研究工作大部分是针对概率测度的一般扰动[摄动]研究的．随着对随机规划进一步的深入研究，随机规划的离散化逼近和统计逼近两者的一般框架逐步呈现出来，然而这两种逼近类型都是利用各自的特殊结构独立发展起来的．对于离散化逼近，1995 年，Birge 和 Qi 又进一步深化了 Birge 和 Wets 于 1986 年所做的工作．同时，关于随机规划模型的统计推断的研究更是热点．在早先的 Kankova 和 Wets 工作之后，许多作者投身于统计估计的渐进性质的研究工作，如相合性、收敛速度、极限定理等，涉及的内容有 Dupacova 和 Wets，Shapiro，King，Kankova，King 和 Rockafellar，Artstein 和 Wets，Pflug，Romisch，Growe，Pflug，Ruszczynski 和 Schultz 等所做的工作．另外，一些关于随机规划逼近的研究是基于可测集值映射的收敛（几乎处处收敛、概率收敛、分布收敛）和可积函数的上图收敛．这些文献有 Salinetti 和 Wets，Salinetti，Vogel，Hess 以及近年的 Korf 和 Wets 所做的工作．最近，国内许多学者对随机规划方面的深入研究也做了大量的工作．骆建文等人研究了随机规划逼近解的收敛性和概率约束规划的稳定性分析；王立洪研究了带有相依样本的随机规划问题的渐近性态；本书作者通过对多元函数关于概率测度积分的深入研究，并将带有约束的随机规划问题等价转化为无约束的规划问题，利用上图收敛理论，解决了一类随机规划逼近最优解集的上半收敛性问题；陈志平对一般形式的多阶段有补偿的问题广义对偶理论及其应用做了研究；万仲平等把单阶段随机规划问题转化为具有多个约束的确定性非线性规划，然后利用李兴斯在 1994 年提出的极大熵函数方法，并把此确定性规划转化为只带简单约束的非线性规划，由此提出了求解这种随机规划的光滑逼近法，同时给出了该法的收敛性分析，较好地克服了因提高离散精度导致约束函数个数迅速增大所带来的求解困难．有关随机规划逼近法已被成功地应用于各类算法求解，并将随机规划思想方法应用于其他领域的研究．对于随机规划微分稳定性的研究，1991 年，王金德首先讨论了随机规划目标函数微分稳定性；1995 年，Birge 和 Qi 证明了闭凸函数的上图收敛蕴含着这些函数在

其极限函数的可微点处次微分的收敛性，并将这个结果应用到凸随机规划的稳定性. 有关非光滑函数的微分和集值映射的微分以及变量系统的数量稳定性研究，可参考文献[93～98]. 最近，骆建文等研究了随机规划的弱微分性，Dentcheva 和 Romisch 给出了两阶段随机规划的微分稳定性.

近年来，由于理论和应用的需要，学者们对概率论与随机过程、参数规划的广义凸性进行了各种推广.

1.2.1 弱收敛概率测度

Lucchetti R, Salinetti G, Wets R J-B 等人给出了 Polish 空间中概率测度弱收敛的这样一个新的特征：

定理 1.1 设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(E)$ 中的概率测度族，则下列条件等价：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

(2) $\forall \{A_n,\ n\in \mathbf{N}\}\subset \mathscr{B}(E)$，且 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subset A_0$，有

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \leqslant \mu_0(A_0)$$

(3) $\forall \{A_n,\ n\in \mathbf{N}\}\subset \mathscr{B}(E)$，且 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n^c \subset A_0^c$，有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geqslant \mu_0(A_0)$$

另外，他们还研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的下半收敛性；Salinetti G 指出概率测度的弱收敛与概率分布函数的上图收敛之间是等价的，并给出了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的上半收敛性；本书作者在多元函数序列无界且半连续的情形下，附加了一些条件，研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理、控制收敛定理，给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件，并用其研究了期望泛函序列的上图收敛性.

本书在第 4 章将相应的结果推广到更一般的可测情形，对概率

测度弱收敛给出了如下若干新的等价条件：

定理 1.2 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若 f_n 下半连续收敛于 f_0，且函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_n 上半连续收敛于 f_0，且函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in N\}$ 上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（4）若 f_n 连续收敛于 f_0，且函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

定理 1.3 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若 f_n 下半连续收敛于 f_0，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x) \geqslant g(x), n=1, 2, \cdots$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_n 上半连续收敛于 f_0，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上一致可积的，使得 $f_n(x) \leqslant g(x), n=1, 2, \cdots$, 则有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（4）若 f_n 连续收敛于 f_0，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$，使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x), n=1, 2, \cdots$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

推论 1 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若 f_n 下半连续收敛到 f_0，且函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 等度下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_n 上半连续收敛到 f_0，且函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 等度上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（4）若 f_n 连续收敛到 f_0，且函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 等度有界，则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

推论 2 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列两个条件是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若 f_n 上半连续收敛 $\overline{f_0}$，又下半连续收敛到 $\underline{f_0}$，函数族 $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ 等度有界且 $\mu_0(D_{f_0})=0$，则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

推论 3 下列两个条件是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若对任意有界可测函数 f，且 $\mu_0(D_f)=0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

1.2.2 推广到集值映射的情形

自从张文修等人对集值随机过程理论研究以来，引起了国内一

批学者对集值随机过程研究的广泛兴趣. 关于这方面研究的重要工作可参见文献[80～90], 其中建立了集值随机过程的一般理论框架, 同时也给随机规划研究开辟了新的广阔前景. 陈志平等人研究了带随机过程的随机规划问题最优解集的过程的特性与稳定性, 证明了带随机过程的随机规划问题最优解集作为集值随机过程的可测性, 可测最优解的选择过程的存在性, 研究了最优解集过程的平稳性、马氏性以及最优值过程的鞅性和最优解集过程的集值鞅性, 并讨论了在有限维分布意义上最优解集过程对所含随机过程参数的连续性以及最优值过程的分布稳定性.

最近, 本书作者对两指标鞅性停止变换的不变性方面做了一定的研究, 并在集值理论框架下讨论了随机规划逼近问题最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

1.2.3　参数规划中广义凸性的推广

最优值函数的凸凹性是非线性规划中灵敏度分析、稳定性分析、参数分析的重要条件, 并在经济学中边际效益和影子价格等问题的研究中得到广泛的应用. 许多作者不断地提出新的广义凸性概念, 如预不变凸、 B-凸、 ε-凸、不变凸、预拟不变凸、 B-预不变凸等, 并用广义凸性替代通常意义上的凸性来研究参数规划最优值的特性.

Fiacc 等人首先系统地研究了参数规划问题最优值函数的凸凹性; 张庆祥等将 Fiacc 等人的研究结果拓广为预不变凸凹性; Saneja 等又将预不变凸函数的定义减弱到 B-预不变凸函数, 研究了 B-预不变凸函数的一些性质, 并举例说明了存在 B-预不变凸函数, 但其不是预不变凸的; 本书作者在利用点到集映射图的概念, 提出了一种新的不变凸点到集映射和不变凹点到集映射的新概念, 将张庆祥等人的有关研究结果拓广为 B-预不变凸凹性, 并研究了最优值函数的 B-预不变凹性与其最优解集映射不变凸性之间的关系, 得到了若

干新的结论. 有关参数规划的稳定性理论研究以及其他研究结果，可参见文献[110～112].

1.3 可测空间中的积分转化定理

1.3～1.5 节的内容除特别指出外，皆选自文献[115～120].

定义 1.1 设 Ω 的某些子集构成的类，$\mathscr{F}$ 为 σ－域，则称 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间.

定义 1.2 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间，定义在 $\mathscr{F}$ 上的非负实值函数 μ 满足：

(1) $\mu(\varnothing)=0$；

(2) $\forall A_n \in \mathscr{F}, n=1, 2, \cdots, A_n \cap A_m=\varnothing, n \neq m$，有可列可加性

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

则称 μ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的一个测度，而称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间. 当 $\mu(\Omega)=1$ 时，则称 μ 为概率，通常记为 P，称 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间.

定义 1.3 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 与 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ 均为可测空间，若映射 $\xi: \Omega \rightarrow \Omega_1$ 满足对每一 $B \in \mathscr{F}_1$，有

$$\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$$

则称 ξ 为由 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ 的可测变换.

定义 1.4 设 ξ 是由 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 到 $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ 的可测变换（亦称 ξ 为随机元），则由下式

$$P_{\xi}(B)=P(\xi^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{F}$$

在 F_1 上定义出的测度 P_{ξ}（称为 ξ 导出测度），称作 ξ 的分布. 由概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 到 $(R, \mathscr{B}(R))$（这里 $\mathscr{B}(R):=\sigma((-\infty, x], x \in R))$ 的随机元 ξ 称为该概率空间上的随机变量. 我们称定义在 $\mathscr{B}(R)$ 上的集函数

$$P_\xi(B)=P(\omega:\xi(\omega)\in B),\ B\in\mathscr{B}(R)$$

为随机变量ξ的概率分布. 这样，由随机变量ξ在它的值域空间R上诱导出一个新的概率空间$(R,\ \mathscr{B}(R),\ P)$. 称$F(x):=P_\xi((-\infty,\ x])$为$\xi$的分布函数.

如果在R上存在一个有限或可列的点集B，对每一$x\in B$，$P(\xi=x)>0$且使得$P(\xi\in B)=1$，则称随机变量ξ是离散型的；如果随机变量ξ对任一有限或可列的点集B，有$P(\xi\in B)=0$，则称随机变量ξ是连续型的.

定义 1.5　设X是概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的实值可测函数，它在$\Omega$上关于$P$的积分$\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$（简记作$EX$，称为$X$的期望）的定义是：对于$X\geqslant 0$，有

$$EX=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n2^n-1}\dfrac{k}{2^n}P\left\{\dfrac{k}{2^n}<X<\dfrac{k+1}{2^n}\right\}+nP(X>n), & P(X=\infty)=0\\ \infty, & P(X=\infty)>0\end{cases}$$

对一般的X（注意$X^\pm:=\max\{\pm X,0\}$），当$\min\{EX^+,\ EX^-\}<+\infty$时，令$EX=EX^+-EX^-$，此时$EX\in[-\infty,\ +\infty]$，称$X$的积分存在；而当$|EX|<+\infty$时，称$X$可积. 当$\min\{EX^+,EX^-\}=+\infty$时，称$X$的积分不存在.

m维随机向量ξ是指由定义在同一个概率空间上的m个随机变量$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_m$所构成的向量，即$\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_m)$. 随机向量$m$的定义域是基本空间$\Omega$，其值域是$m$维欧氏空间$R^m$. 若把$R^m$中的Borel 域记为$\mathscr{B}(R^m)$，则随机向量$\xi$是可测空间$(\Omega,\ \mathscr{F})$到$(R^m,\ \mathscr{B}(R^m))$上的可测变换. 我们称定义在$\mathscr{B}(R^m)$上的集函数

$$P_\xi(B)=P(\omega:\xi(\omega)\in B),\quad B\in\mathscr{B}(R^m)$$

为随机向量ξ的概率分布. 同样，由随机向量ξ在它的值域空间R^m上诱导出一个新的概率空间$(R^m,\ \mathscr{B}(R^m),\ P_\xi)$. 称

$$F(x):=P_\xi((-\infty,\ x])=P(\xi_1\leqslant x_1,\ \xi_2\leqslant x_2,\ \cdots,\ \xi_m\leqslant x_m)$$

为随机向量ξ的分布函数.

如果m维随机向量ξ的每个分量$\xi_i(i=1, 2, \cdots, m)$为离散型随机变量，则称随机向量ξ为离散型随机向量；如果m维随机向量ξ的每个分量$\xi_i(i=1, 2, \cdots, m)$为连续型随机变量，则称随机向量ξ为连续型随机向量.

如果每个$E\xi_i(i=1, 2, \cdots, m)$存在，则随机向量$\xi$的数学期望定义为各分量的期望所构成的向量$(E\xi_1, E\xi_2, \cdots, E\xi_m)$.

定理 1.4（积分转化定理） 设ξ为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$到$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$的可测变换，$g$是$(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$到$(R, \mathscr{B}(R))$上的可测函数，则下式在其一端有意义时成立

$$E\xi = \int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(\mathrm{d}\omega) = \int_{\Omega_1} g(x)\mu_{\xi}(\mathrm{d}x)$$

1.4 度量空间中的概率测度弱收敛及其等价条件

设(E, d)为度量空间，$\mathscr{B}(E)$表示E中的Borel子集全体，$\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$为定义在$\mathscr{B}(E)$上取值在$[0, 1]$的概率测度族，$C_b(E)$表示$E$中的有界连续函数全体，因此我们自然引进如下的定义：

定义 1.6 设$\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$为$\mathscr{B}(E)$的概率测度族，若对每一$f\in C_b(E)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

则称概率测度族$\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$弱收敛于$\mu_0$，记为$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

定义 1.7 设(E, d)是度量空间，μ为$\mathscr{B}(E)$上的一概率测度，$A\in \mathscr{B}(E)$. 若$\mu(\partial A)=0$（∂A为A的边界），则称A为概率测度μ的$\mu-$连续集. 概率测度μ的μ-连续集全体称为概率测度μ的连续集，记为$\text{cont}-\mu$（即$\text{cont-}\mu := \{A\in \mathscr{B}(E): \mu(\partial A)=0\}$）.

定理 1.5 设$\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$为$\mathscr{B}(E)$中的概率测度族，$U_b(E)$表示$E$中关于$d$一致连续的有界函数全体，则下列条件等价：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;

(2) $\forall f \in U_b(E)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$;

(3) 对任意的闭集 F，$\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F) \leqslant \mu_0(F)$;

(4) 对任意的开集 G，$\liminf\limits_{n\to\infty}\mu_n(G) \geqslant \mu_0(G)$;

(5) 对任意的 μ_0 – 连续集 $A\in\mathscr{B}(E)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu_0(A)$.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间，称映射 $X:\Omega\to E$ 为 $\mathscr{F}$-可测的，若对每一 $A\in B(E)$，有

$$\{\omega: X(\omega)\in A\}\in\mathscr{F}$$

并称 X 是由 $(\Omega, \mathscr{F})$ 到 $(E, \mathscr{B}(E))$ 上的随机元. 它在 $\mathscr{B}(E)$ 上导出的分布 P_X（亦称做 X 的分布）由下式

$$P_X(A) = P\circ X^{-1}(A), \quad A\in\mathscr{B}(E)$$

定义. 特别地，若 $E = R^m$，我们称 X 是随机向量；若 $E = C$（C 为一切实值函数组成的集合），我们称 X 是随机函数.

定义 1.8　假设存在一列定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上取值在 E 中的随机元列 $\{X_0; X_n, n\in\mathbf{N}\}$，记它们对应的概率分布列为 $\{P_{X_0}; P_{X_n}, n\in\mathbf{N}\}$. 如果 $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_{X_0}$，那么就称 X_n 依分布收敛于 X_0，简记为 $X_n \xrightarrow{d} X_0$.

定理 1.6　设 $\{X_0; X_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为一列定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上取值在 E 中的随机元列，则下列条件等价：

(1) $X_n \xrightarrow{d} X_0$;

(2) $\forall f \in U_b(E)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} Ef(X_n) = Ef(X_0)$;

(3) 对任意的闭集 F，$\limsup\limits_{n\to\infty} P(X_n\in F) \leqslant P(X_0\in F)$;

(4) 对任意的开集 G，$\liminf\limits_{n\to\infty} P(X_n\in G) \geqslant P(X_0\in G)$;

(5) 对任意的 X-连续集 $A\in\mathscr{B}(E)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n\in F) = P(X_0\in F)$.

设 ξ、ξ_n 均是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 到 $(R^m, \mathscr{B}(R^m))$ 上的随机变量，μ、μ_n 均是 $(R^m, \mathscr{B}(R^m))$ 上的测度，$P\circ\xi^{-1}$、$P\circ\xi_n^{-1}$ 分别是 μ、μ_n 在

$(R^m, \mathscr{B}(R^m))$上导出的测度，F、F_n分别是μ、μ_n的分布函数，分布函数F的所有连续点组成的集合记为cont-F.

定义 1.9 （1）若对R上的任一有界、实值、连续函数f，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_R f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

则称概率测度族$\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$弱收敛于$\mu$、$\mu_n$，记为$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

（2）若$P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_{\xi_0}$，则记为$\xi_n \xrightarrow{d} \xi_0$.

（3）若对任意的$x\in \text{cont-}F$，有$F_n \to F$，则称F_n分布收敛于F，记为$F_n \xrightarrow{d} F_0$.

定理 1.7 下列陈述是等价的：

（1）$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$；

（2）$F_n \xrightarrow{d} F_0$.

1.5 可分度量空间中的概率测度弱收敛及其等价条件

本节中，设(E, d)为可分的度量空间，$\mathscr{B}(E)$表示E中的Borel子集全体，$\mathscr{P}(E)$表示定义在$\mathscr{B}(E)$上取值在$[0, 1]$的概率测度全体，$\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$为$\mathscr{P}(E)$的概率测度族，这时，我们可以在$\mathscr{P}(E)$上引入距离$\rho$，使得按距离$\rho$收敛等价于上一节定义的概率测度弱收敛.

定理 1.8 在$\mathscr{P}(E)$上可以引入距离ρ，使得

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0 \Leftrightarrow \rho(\mu_n, \mu_0)\to 0$$

定义 1.10 度量空间E上的概率测度族$\Pi=\{\mu_\alpha; \alpha\in T\}$称为胎紧的，若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在紧集$K$，使得对一切$\mu_\alpha \in \Pi$，有

$$\mu_\alpha(K)>1-\varepsilon$$

定理 1.9 可分完备度量空间E上的弱收敛概率测度族$\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$是胎紧的.

定义 1.11　称概率测度族$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$关于函数$f$为胎紧的，若对任意的$\varepsilon>0$，存在紧集$K_\varepsilon\subset E$，使得

$$\mu_n(E\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon \quad 且 \quad \int_{E\setminus K_\varepsilon}|f(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots$$

定理 1.10　若$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，且概率测度族$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$关于函数族$f$为胎紧的，那么

(1) 若f下半连续，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

(2) 若f上半连续，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

定理 1.11　若$\mu_n\xrightarrow{w}\mu$，那么

(1) 若f下半连续且下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

(2) 若f上半连续且上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

由定理 1.11 及定理 1.5 容易得到下列概率测度弱收敛的若干等价条件.

定理 1.12　下列陈述是等价的:

(1) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$;

(2) 若f下半连续且下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

(3) 若f上半连续且上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

2 概率测度的若干收敛性

本章主要研究了概率测度的若干收敛性问题，讨论了概率测度在集合序列不同收敛意义上的连续性，给出了弱收敛概率测度序列连续收敛的若干充分条件. 同时也讨论了概率测度序列的弱收敛与上图收敛之间的关系，并给出了概率测度序列一致收敛的一个充分条件.

2.1 引 言

随机规划经常要涉及随机变量函数的期望泛函，而期望泛函实际上是多元函数关于概率测度的积分，因此有必要对概率测度以及概率测度序列的收敛性进行研究. 由于概率测度以及概率测度序列的收敛性依赖于集合的收敛性概念，而集合在不同意义上的收敛性将导致概率测度及其概率测度序列收敛性的不同. 古典的集合收敛只能保证概率测度的连续性，但不能保证弱收敛概率测度序列的连续收敛性；集合的 K-收敛只能保证概率测度的上半连续性，不能保证概率测度的下半连续性，但概率测度序列的上半收敛性等价于概率测度序列的弱收敛；集合的正则收敛性既能保证概率测度在它的连续集处的连续性，又能保证弱收敛概率测度序列在其极限概率测度的连续集处的连续收敛性. 这三种类型的集合收敛性之间互不蕴

涵. 但集合的正则收敛性蕴涵弱正则收敛性，我们研究得到集合的弱正则收敛性也不仅能保证概率测度在它的连续集处的连续性，而且也能保证弱收敛概率测度序列在其极限概率测度的连续集处的连续收敛性. 本章首先介绍四种集合的收敛性概念，讨论了集合序列不同收敛性之间的关系；其次研究了概率测度在集合序列不同收敛意义上的连续性，得到了弱收敛概率测度序列连续收敛的若干充分条件；最后，在集合的弱正则收敛意义上，研究了概率测度序列的弱收敛与上图收敛之间的关系，并给出了概率测度序列一致收敛的一个充分条件.

2.2 集合的几种收敛性概念

设 (E, d) 是 m 维 Polish（波兰）空间，$\mathscr{B}(E)$ 表示 E 中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(E)$ 表示定义在 $\mathscr{B}(E)$ 上取值在 $[0, 1]$ 的概率测度全体，$\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(E)$ 中的概率测度族，$\mathscr{F}(E)$ 表示 E 中的闭子集全体，$\mathscr{G}(E)$ 表示 E 中的开子集全体，$\mathbf{N}$ 表示全体自然数组成的集合. 称集合 A 为可测的，如果 $A\in\mathscr{B}(E)$. 特别地，开集和闭集为可测集. A°、$\mathrm{cl}A$、∂A、A^c 分别表示可测集 A 的内部、闭包、边界、余集. $\{A_0; A_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{B}(E)$ 中的可测集族.

定义 2.1 若集合序列 $\{A_n\}$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$$

其中

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{x\in E : x\in A_{n_k},\ \forall k\in \mathbf{N}\right\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{x\in E : x\in A_n,\ \forall n\geqslant n_0\right\}$$

则称集合序列 $\{A_n\}$ 收敛于 A，记为 $A_n\to A$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

定义 2.2 若集合序列 $\{A_n\}$ 满足

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A \subset K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$$

其中

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{x \in E : x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k},\ x_{n_k} \in A_{n_k},\ \forall k \in \mathbf{N}\right\}$$

$$K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{x \in E : x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n \in A_n,\ \forall n \geqslant n_0\right\}$$

则称集合序列 $\{A_n\}$ K-收敛于 A ，记为 $A_n \xrightarrow{K} A$ 或 $K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

定义 2.3 如果集合序列 $\{A_n\}$ 满足

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = A \tag{1}$$

且

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty} (A_n^{\circ})^c = (A^{\circ})^c \tag{2}$$

则称集合序列 $\{A_n\}$ 正则收敛于 A ，记为 $A_n \xrightarrow{r} A$ 或记为 $\tau\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

定义 2.4 如果集合序列 $\{A_n\}$ 满足

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty} (A_n \Delta A) \subset \partial A$$

其中

$$A_n \Delta A = (A_n \setminus A) \bigcup (A \setminus A_n)$$

则称集合序列 $\{A_n\}$ 弱正则收敛于 A ，记为 $A_n \xrightarrow{R} A$ 或记为 $R\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

2.3 集合序列收敛性之间的关系

定理 2.1 若 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在且 $K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在，那么

（1）若 $A_n \xrightarrow{K} A$ 且 $K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ ，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

（2）若 $A_n \to A$ 且 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$，则

$$K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

证明（1）设 $x_0 \in \limsup_{n\to\infty} A_n$，则存在子序列 $\{n_k\}$，使得 $x_0 \in A_{n_k}$．令 $x_{n_k} \equiv x_0$，则 $x_{n_k} \in A_{n_k}$ 且 $x_{n_k} \to x_0$．由定义 2.2 知，

$$x_0 \in K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n$$

于是

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n$$

由 $K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ 及 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n$ 的存在性，有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

由 $A_n \xrightarrow{K} A$，故 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$．

（2）设 $x_0 \in \liminf_{n\to\infty} A_n$，则存在 n_0，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $x_0 \in A_n$．令 $x_n \equiv x_0$，则当 $n \geqslant n_0$ 时，$x_n \in A_n$ 且 $x_n \to x_0$．由定义 2.2 知，

$$x_0 \in K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$$

于是

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$$

由 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ 及 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 的存在性，有

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \subset K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$$

由 $A_n \to A$，故 $K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$．

注：关系式 $\mathrm{cl}(\lim_{n\to\infty} A_n) \subset K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n$ 恒成立，但反包含不一定成立．

例 1　若设 $A_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$，那么 $K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\}$，$\lim_{n\to\infty} A_n = \varnothing$．显然 $K\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n \subset \mathrm{cl}(\lim_{n\to\infty} A_n)$ 不成立．

引理 1 设 $\{A_n\}$ 为 E 中的子集序列，则下列两个条件等价：

（1） $\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$；

（2） $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$ 且对任意的 $x \in A^\circ$，存在 x 的邻域 $B(x,\ \delta)$，使得对充分大的 n，有 $B(x,\ \delta) \subset A_n$.

定理 2.2（1）若 $A_n \xrightarrow{\tau} A$ 且 A 为正则的（即 $\mathrm{cl}(A^\circ) = A$），则 $A_n \xrightarrow{K} A$.

（2）若 $A_n \xrightarrow{K} A$ 且对任意的 $x \in A^\circ$，存在 x 的邻域 $B(x,\ \delta)$，使得对充分大的 n，有 $B(x,\ \delta) \subset A_n$，则 $A_n \xrightarrow{\tau} A$.

证明 （1）由 $A_n \xrightarrow{\tau} A$ 知，$K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A \subset A$.

下面证明 $A \subset K\text{-}\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 设 $x \in A$，由 A 的正则性知，存在 $x_n \in A^\circ$，使得 $x_n \to x_0$. 由引理 1 知，对每个 x_n，存在 N_n，当 $k \geqslant N_n$ 时，有 $x_n \in A_k$，构造下列序列 $\{y_n\}$：

$$y_n = \begin{cases} \text{任意}, & n < N_1 \\ x_1, & N_1 \leqslant n < \max\{N_1,\ N_2\} \\ x_2, & \max\{N_1,\ N_2\} \leqslant n < \max\{N_1,\ N_2,\ N_3\} \\ \vdots \end{cases}$$

由序列 $\{y_n\}$ 的构造，则对所有的 $N \geqslant N_1$，有 $y_n \in A_n$. 又由 $x_n \to x_0$，则 $y_n \to x_0$. 故

$$x_0 \in K\text{-}\liminf_{n\to\infty} A_n$$

因此由定义 2.2 知，$A_n \xrightarrow{K} A$.

（2）由 $A_n \xrightarrow{K} A$ 知，$K\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. 再注意到定理 2.2 条件（2）的后半部分，由引理 1 知，$A_n \xrightarrow{\tau} A$.

例 2 设

$$A_n = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right), & n\text{ 为偶数} \\ (n,\ \infty), & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

$A=\{0\}$，易知 $A_n \xrightarrow{r} A$，而 $K\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 不存在.

例 3 设 $A_n=\left[B\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right)\right]^c$，$A=R^2$，易知 $A_n \xrightarrow{K} A$，而 $\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 不存在.

定理 2.3 (1) 若 $A_n \xrightarrow{r} A$，则 $A_n \xrightarrow{R} A$，但反之不成立.

(2) 若 $A_n \xrightarrow{R} A$ 且 A 为正则的，则 $A_n \xrightarrow{r} A$.

证明 (1) 设 $x_0 \in K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \Delta A)$，则存在 $x_{n_k} \in A_{n_k}\Delta A$，使得 $x_{n_k} \to x_0$，即 $x_{n_k} \in A_{n_k} \setminus A$ 或 $x_{n_k} \in A \setminus A_{n_k}$.

若 $x_{n_k} \in A_{n_k}\Delta A$，则 $x_{n_k} \in A_{n_k}$ 且 $x_{n_k} \in A^c$. 由 $A_n \xrightarrow{r} A$ 知，$x_0 \in A$ 且 $x_0 \in \mathrm{cl}(A^c)$，于是

$$x_0 \in \partial A$$

若 $x_{n_k} \in A \setminus A_{n_k}$，则 $x_{n_k} \in A$ 且 $x_{n_k} \in A_{n_k}{}^c$. 由 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$ 知，A 为闭集，故 $x_0 \in A$. 另一方面，因为 $A_n \xrightarrow{r} A$，从而 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{cl}(A_n{}^c) \subset \mathrm{cl}(A^c)$，故 $x_0 \in \mathrm{cl}(A^c)$，于是

$$x_0 \in \partial A$$

因此

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \Delta A) \subset \partial A$$

反之，令 $A_n=\left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)$，$A=\{0,1\}$，显然

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \Delta A)=\{0,\ 1\} \subset \partial A$$

故 $A_n \xrightarrow{r} A$，但 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty} A_n=\{0\} \neq A$.

(2) 若 $A_n \xrightarrow{R} A$，首先证明下列事实：对任意的 $x_0 \in A^\circ$，存在 $\delta>0$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$B(x,\ \delta)\subset A_n$$

反设此结论不成立，即令 $x_0\in A^\circ$，存在子序列 $\{n_k\}$，使得对所有的 $k\geqslant N$，有

$$A_n^c\cap B\left(x_0,\frac{1}{k}\right)\neq\varnothing$$

这蕴涵着存在 $x_{n_k}\in A_{n_k}^c\cap B\left(x_0,\ \frac{1}{k}\right)$，且 $x_{n_k}\to x_0$. 于是对充分大的 k，有

$$x_{n_k}\in B\left(x_0,\ \frac{1}{k}\right)\subset A^\circ\subset A$$

故

$$x_{n_k}\in A\setminus A_{n_k}$$

又 $A_n\xrightarrow{r}A$，由 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n\Delta A)\subset\partial A$，则 $x_0\in\partial A$，这与 $x_0\in A^\circ$ 矛盾.

其次，证明 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}A_n=A$. 反设 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\neq A$，则存在 $x_0\in K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$，但 $x_0\notin A$ 或者存在 $x_0\in A$，但 $x_0\notin K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$. 首先考虑第一种情形. 一方面，由 $x_0\in K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 知，存在 $x_{n_k}\in A_{n_k}$，使得 $x_{n_k}\to x_0$. 另一方面，由 A 的正则性知，A 为闭集，故 A^c 为开集，又由 $x_0\notin A$ 且 $x_{n_k}\to x_0$ 知，对充分大的 k，有 $x_{n_k}\in A^c$，于是对充分大的 k，有 $x_{n_k}\in A_{n_k}\setminus A$. 由 $A_n\xrightarrow{r}A$ 及 A 的正则性，有

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n\setminus A)\subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n\Delta A)\subset\partial A\subset A$$

故 $x_0\in A$. 这与 $x_0\notin A$ 矛盾. 另一种情形的证明类似于上述的证明. 由引理 1 知，$A_n\xrightarrow{r}A$.

2.4 概率测度在集合不同收敛意义上的连续性

定理 2.4 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，则

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)\geqslant\mu(\liminf\limits_{n\to\infty}A_n)$； (3)

（2）$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n)$.　（4）

推论 1　设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，且 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$$

证明　因为 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$，则比较（3）式与（4）式，得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$$

定理 2.5　设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，那么

（1）如果 $\forall x\in(K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n)^\circ$，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $x\in A_n$ 且 $\mu(\partial[K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n])=0$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\mu(A_n)\geqslant\mu(K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n)\tag{5}$$

（2）
$$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n)\tag{6}$$

证明　（1）设 $x\in(K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n)^\circ$，由定理 2.5 的条件（1）知，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $x\in A_n$，故 $x\in\liminf_{n\to\infty}A_n$，即

$$(K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n)^\circ\subset\liminf_{n\to\infty}A_n$$

注意到 $\mu(\partial[K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n])=0$，由（3）式，有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\mu(A_n)&\geqslant\mu(\liminf_{n\to\infty}A_n)\geqslant\mu([K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n]^\circ)\\&=\mu([K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n]^\circ)+\mu(\partial[K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n])\\&=\mu(K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n)\end{aligned}$$

（2）由定理 2.1 的证明过程易知

$$\limsup_{n\to\infty}A_n\subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n$$

利用（4）式，有

$$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n)\leqslant\mu(K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n)$$

推论 2 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，且 $K\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n=A$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(K\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$$

证明 因为 $K\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n=A$，则

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n=K\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n=A$$

由（6）式，得

$$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n)=\mu(K\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$$

例 4 设 $A_n=\left[B\left(0,\ \frac{1}{n}\right)\right]^c\subset R^2$， $A=R^2$， $\forall A\in\mathscr{B}(R^2)$，令

$$\mu(B)=\begin{cases}0, & 0\notin B\\ 1, & 0\in B\end{cases}$$

易知 $A_n\xrightarrow{K}A$， $\mu(\partial[K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n])=0$，且 $0\in(K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n)^\circ$，但 $0\notin A_n$，而 $\mu(A_n)=0$， $\mu(A)=0$，显然定理 2.5（1）的结论不成立.

例 5 设 $A_n=\left(-1,\ -\frac{1}{n}\right]$， $A=(-1,\ 0]$， $\forall A\in\mathscr{B}(R)$，令

$$\mu(B)=\begin{cases}0, & 0\notin B\\ 1, & 0\in B\end{cases}$$

易知 $A_n\xrightarrow{K}A$， $\mu(\partial[K\text{-}\liminf_{n\to\infty}A_n])=0$，但 $\mu(A_n)=0$， $\mu(A)=1$，显然定理 2.5（1）的结论不成立.

定理 2.6 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，那么

（1）若 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n^\circ)^c\subset(A^\circ)^c$ 且 $\mu(\partial A)=0$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\mu(A_n)\geqslant\mu(\liminf_{n\to\infty}A_n) \tag{7}$$

（2）若 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n\subset A$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n)\leqslant\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n) \tag{8}$$

证明　先证明（2）. 由定理 2.5（2）易知定理 2.6（2）成立.

（1）由 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n^c\subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n^\circ)^c\subset(A^\circ)^c$，则由定理 2.5（2），有

$$\limsup_{n\to\infty}[1-\mu(A_n)]=\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n^c)\leqslant\mu((A^\circ)^c)=1-\mu(A^\circ)$$

于是

$$\limsup_{n\to\infty}[-\mu(A_n)]\leqslant\limsup_{n\to\infty}[1-\mu(A_n)]+\limsup_{n\to\infty}(-1)\leqslant-\mu(A^\circ)$$

注意到 $\mu(\partial A)=0$，则

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\mu(A_n)&\geqslant-\limsup_{n\to\infty}[-\mu(A_n)]\\&\geqslant\mu(A^\circ)=\mu(A^\circ)+\mu(\partial A)=\mu(A)\end{aligned}$$

例 6　设 $A_n=\left(-1,\ -\dfrac{1}{n}\right]$，$A=(-1,\ 0]$，$\forall A\in\mathscr{B}(R)$，令

$$\mu(B)=\begin{cases}0, & 0\notin B\\1, & 0\in B\end{cases}$$

易知 $A_n\xrightarrow{\tau}A$，$\mu(\partial A)=1$，但 $\mu(A_n)=0$，$\mu(A)=1$，显然定理 2.6（1）的结论不成立.

推论 3　设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，$\tau\text{-}\limsup_{n\to\infty}A_n=A$，且 $\mu(\partial A)=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\tau\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$$

证明　由定义 2.2 及（7）式与（8）式易得.

定理 2.7　设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，且 $\mu(\partial A)=0$，那么

（1）若 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n\setminus A)\subset\partial A$，则

$$\liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu(A) \tag{9}$$

（2）若 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A\setminus A_n)\subset\partial A$，则

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A) \tag{10}$$

证明 （1）由 $A\setminus A_n = A - A_n \cap A$，我们有

$$\mu(A\setminus A_n) = \mu(A) - \mu(A_n\cap A) \geqslant \mu(A) - \mu(A_n)$$

注意到 $\mu(\partial A)=0$，由（6）式，有

$$\limsup_{n\to\infty}[\mu(A)-\mu(A_n)] \leqslant \limsup_{n\to\infty}\mu(A\setminus A_n) \leqslant \mu(\partial A) = 0$$

故

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}[-\mu(A_n)] &\leqslant \limsup_{n\to\infty}[\mu(A)-\mu(A_n)] + \limsup_{n\to\infty}[-\mu(A)] \\ &\leqslant -\mu(A)\end{aligned}$$

于是

$$\liminf_{n\to\infty}\mu(A_n) = -\limsup_{n\to\infty}[-\mu(A_n)] \geqslant \mu(A)$$

（2）由 $A_n\setminus A = A_n - A\cap A_n$，我们有

$$\mu(A_n\setminus A) = \mu(A_n) - \mu(A_n\cap A) \geqslant \mu(A_n) - \mu(A)$$

由（6）式，有

$$\limsup_{n\to\infty}[\mu(A_n)-\mu(A)] \leqslant \limsup_{n\to\infty}\mu(A_n\setminus A) \leqslant \mu(\partial A) = 0$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}\mu(A_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty}[\mu(A_n)-\mu(A)] + \limsup_{n\to\infty}\mu(A) \leqslant \mu(A)$$

推论 4 设 $\mu\in\mathscr{P}(E)$，$A_n \xrightarrow{r} A$，且 $\mu(\partial A)=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \mu(R\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n) = \mu(A)$$

证明 由定义 2.4，我们有

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A\setminus A_n) \subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n\Delta A) \subset \partial A$$

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \setminus A) \subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \Delta A) \subset \partial A$$

再注意到 $\mu(\partial A)=0$，由定理 2.7 可知，(9) 式与 (10) 式成立，比较 (9) 式与 (10) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(R\text{-}\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(A)$$

2.5 弱收敛概率测度序列连续收敛的若干充分条件

定义 2.5 设 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为概率测度族，若对任意的 $A\in \mathrm{cont}\mu_0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu_0(A)$$

则称概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 弱收敛于 μ_0，记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

注：由定理 1.5 知定义 1.6 和定义 2.5 等价.

定义 2.6 设 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为概率测度族，若 $A_n \xrightarrow{R} A$，且对任意的 $A\in \mathscr{B}(E)$，有

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A)\leqslant \mu_0(A)$$

则称概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上半连续收敛于 μ_0；若概率测度族 $\{-\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上半连续收敛于 $-\mu_0$，则称概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下半连续收敛于 μ_0；若概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 既上半连续收敛又下半连续收敛于 μ_0，称概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 连续收敛于 μ_0.

定理 2.8 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $\mu_0(\partial A)=0$，那么

(1) 若 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A \setminus A_n)\subset \partial A$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A_n)\geqslant \mu_0(A) \tag{11}$$

(2) 若 $K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \setminus A)\subset \partial A$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A_n)\leqslant \mu_0(A) \tag{12}$$

证明 （1）由 $A\setminus A_n = A - A_n \cap A$，我们有

$$\mu_n(A\setminus A_n) = \mu_n(A) - \mu_n(A_n \cap A) \geqslant \mu_n(A) - \mu_n(A_n)$$

由定理 2.8 的条件（1）及定理 1.1 和定理 1.5，有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}[\mu_n(A)-\mu_n(A_n)] &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(A\setminus A_n)\\ &\leqslant \mu_0(\partial A)=0\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A_n)] &\leqslant \limsup_{n\to\infty}[\mu_n(A)-\mu_n(A_n)]+\limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A)]\\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A)]\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A_n) &= -\limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A_n)]\\ &\geqslant -\limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A)] = \liminf_{n\to\infty}\mu_n(A)\end{aligned}$$

再注意到 A、∂A 为开集且 $\mu_0(\partial A)=0$，由定理 1.5（4），有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(A) &\geqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(A\setminus\partial A)\\ &\geqslant \mu_0(A\setminus\partial A) \geqslant \mu_0(A)-\mu_0(\partial A)=\mu_0(A)\end{aligned}$$

（2）结合（1）和定理 2.7（1）的证明易得.

推论 5 设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{P}(E)$ 且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则

（1）概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathrm{cont}\mu_0 \cap \mathscr{G}(E)$ 下半连续收敛于 μ_0.

（2）概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathrm{cont}\mu_0 \cap \mathscr{F}(E)$ 上上半连续收敛于 μ_0.

（3）概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\mathrm{cont}\mu_0$ 上连续收敛于 μ_0.

证明 由 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$ 可推出（3）.

设 $A\in\mathrm{cont}\mu_0$ 且 $\mu_n \xrightarrow{R} \mu_0$，由定义 2.4，我们有

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A\setminus A_n) \subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \Delta A) \subset \partial A$$

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n\setminus A) \subset K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n \Delta A) \subset \partial A$$

注意到，比较（11）式与（12）式得

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_n)=\mu_0(A)$$

再由定义 2.6，则概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\text{cont}\mu_0$ 上连续收敛于 μ_0.

由 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$ 可推出（1）（2）. 注意到

$$\text{cont}\mu_0\cap\mathscr{G}(E)\subset\text{cont}\mu_0\quad 且\quad \text{cont}\mu_0\cap\mathscr{F}(E)\subset\text{cont}\mu_0$$

由定理 2.8 显然.

定理 2.9　设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{P}(E)$，则概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\text{cont}\mu_0$ 上连续收敛于 μ_0 等价于 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$.

证明　充分性. 由推论 5 显然.

必要性. 事实上，设 $A\in\text{cont}\mu_0$，令 $A_n\equiv A$，显然 $\mu_n\xrightarrow{R}\mu_0$. 由概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 $\text{cont}\mu_0$ 上连续收敛于 μ_0，故

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_n)=\mu_0(A)$$

再由定义 2.5 知，$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$.

定理 2.10　设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{P}(E)$ 且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，那么

（1）若 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n^\circ)^c\subset(A^\circ)^c$ 且 $\mu_0(\partial A)=0$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A_n)\geqslant\mu_0(A)\tag{13}$$

（2）若 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\subset A$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A_n)\leqslant\mu_0(A)\tag{14}$$

证明　先证明（2）. 由定理 1.1（2）知定理 2.10（2）成立.

（1）由 $K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n)^c\subset K\text{-}\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n^\circ)^c\subset(A^\circ)^c$，则

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A_n)^c\subset(A^\circ)^c$$

由定理 1.1（2），有

$$\limsup_{n\to\infty}[1-\mu_n(A_n)]=\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A_n^c)\leqslant\mu_0((A^\circ)^c)=1-\mu_0(A^\circ)$$

于是

$$\limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A_n)] \leqslant \limsup_{n\to\infty}[1-\mu_n(A_n)] + \limsup_{n\to\infty}(-1)$$
$$\leqslant -\mu_0(A^\circ)$$

注意到 $\mu_0(\partial A)=0$，则

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A_n) \geqslant -\limsup_{n\to\infty}[-\mu_n(A_n)]$$
$$\geqslant \mu_0(A^\circ)=\mu_0(A^\circ)+\mu_0(\partial A)=\mu_0(\mathrm{cl}A)$$
$$\geqslant \mu_0(A)$$

推论 6 设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}\subset\mathscr{P}(E)$，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，$\mu_0(\partial A)=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_n)=\mu_0(A)$$

证明 由定义 2.2 及（13）式与（14）式易得.

注：若把推论 5 中的条件 $\tau\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 换成 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 或 $K\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A_n)\neq\mu_0(A)$.

例 7 设 $A_n=[-1,\ 1]\setminus\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$A=[-1,\ 1]$，$\forall B\in\mathscr{B}(R)$，令

$$\mu_n(B)=\begin{cases}0, & \dfrac{1}{n}\notin B,\\ 1, & \dfrac{1}{n}\in B,\end{cases}\qquad \mu_0(B)=\begin{cases}0, & 0\notin B\\ 1, & 0\in B\end{cases}$$

易知 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 且 $K\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，$\mu_0(\partial A)=0$，而 $\mu_n(A_n)=0$，$\mu_0(A)=0$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A_n)\neq\mu_0(A)$.

2.6 概率测度的弱收敛与上图收敛的关系

概率测度的弱收敛与概率测度分布函数的上图收敛有着密切的

联系. 事实上，它们是等价的，除概率测度的许多古典的收敛结果外，这个联系能够阐明更一般的一致收敛准则.

在有限维欧氏空间中，对于右连续分布函数族（即上半连续族）$\{F_0; F_n, n\in \mathbf{N}\}$，$F_n \xrightarrow{d} F_0$（即在 F 的连续集上 F_n 逐点收敛于 F）等价于 $F_n \xrightarrow{\text{hypo}} F_0$. 因此在 cont$F$ 上，逐点收敛和亚图收敛（hypo-convergence）共同揭示了族 $\{F_0; F_n, n\in \mathbf{N}\}$ 在 cont$F$ 上等度上半连续性. 如果对于左连续形式的分布函数族（即下半连续族）$\{G_0; G_n, n\in \mathbf{N}\}$，有 $G_n \xrightarrow{d} G_0 \Leftrightarrow G_n \xrightarrow{\text{epi}} G_0$，因此族 $\{G_0; G_n, n\in \mathbf{N}\}$ 在 cont$G$ 上等度下半连续. 显而易见，cont$F$ = cont$G$. 于是族 $\{G_0; G_n, n\in \mathbf{N}\}$（或等价地 $\{F_0; F_n, n\in \mathbf{N}\}$）在 cont$F$ = cont$G$ 上确实是等度连续. 直接的结果是 $\{F_n, n\in \mathbf{N}\}$ 在 F 的连续点的邻域上一致收敛于 F. 这就扩展了熟知的 **Polya 定理**：

如果 $F_n \xrightarrow{d} F_0$，则 $\{F_n, n\in N\}$ 在 cont$F$ 的任意紧子集 K 上是一致收敛于 F（参见文献[13]）.

现在我们考虑定义在 $\mathscr{B}(E)$ 上取值在[0, 1]上的上半连续（相应地，下半连续）概率测度构成的空间 SC（$\mathscr{B}(E)$；[0, 1]）（相应地，LC（$\mathscr{B}(E)$；[0, 1]））. 称概率测度 $\mu:\mathscr{B}(E)\to[0, 1]$ 是上半连续（相应地，下半连续）的，如果对任意的 $A\in\mathscr{B}(E)$，且满足：对任意的 $A_n \xrightarrow{R} A$，有

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A) \quad （相应地，\liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \geqslant \mu(A)） \tag{15}$$

定义 2.7 设 $\{\mu_0; \mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为 LC（$\mathscr{B}(E)$；[0, 1]）上的概率测度族，若对任意的 $A\in\mathscr{B}(E)$，满足：

（1）对任意的 $A_n \xrightarrow{R} A$，有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geqslant \mu_0(A) \tag{16}$$

（2）存在某个 $A_n \xrightarrow{R} A$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \leqslant \mu_0(A) \tag{17}$$

则称概率测度序列 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上图收敛于 μ_0，记为 $\mu_n \xrightarrow{\text{epi}} \mu_0$.

定义 2.8 设$\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$为 SC（$\mathscr{B}(E)$；[0, 1]）上的概率测度族，若对任意的$A\in\mathscr{B}(E)$，满足：

（1）对任意的$A_n \xrightarrow{R} A$，有

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \leqslant \mu_0(A) \tag{18}$$

（2）存在某个$A_n \xrightarrow{R} A$，使得

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geqslant \mu_0(A) \tag{19}$$

则称概率测度序列$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$亚图收敛于$\mu_0$，记为$\mu_n \xrightarrow{\text{hypo}} \mu_0$.

定理 2.11 设$\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$为 LC（$\mathscr{B}(E)$；[0, 1]）上的概率测度族，那么

（1）若$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则在$\text{cont}\mu_0$上$\mu_n \xrightarrow{\text{epi}} \mu_0$.

（2）若在$\mathscr{G}(E)$上$\mu_n \xrightarrow{\text{epi}} \mu_0$，则$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

证明 （1）由$A_n \xrightarrow{R} A$可得

$$K\text{-}\limsup_{n\to\infty}(A\setminus A_n) \subset \partial A$$

注意到$A\in \text{cont}\mu_0$，由定理 2.8，有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geqslant \mu_0(A)$$

这就满足（16）式. 另一方面，对任意的$A\in\text{cont}\mu_0$，令$A_n \equiv A$，则$A_n \xrightarrow{R} A$. 又因为$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，由定理 2.8（2）知，

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \leqslant \mu_0(A)$$

这就满足（17）式. 由定义 2.7 可知定理 2.11（1）的结论成立.

（2）对任意的$A\in\mathscr{G}(E)$，令$A_n \equiv A$，显然$A_n \xrightarrow{R} A$. 由$\mu_n \xrightarrow{\text{epi}} \mu_0$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geqslant \mu_0(A)$$

由定理 1.5 知，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$. 证毕.

定理 2.12 设$\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$为 SC（$\mathscr{B}(E)$；[0, 1]）上的概率

测度族，那么

(1) 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则在 $\text{cont}\mu_0$ 上 $\mu_n \xrightarrow{\text{hypo}} \mu_0$.

(2) 若在 $\mathscr{F}(E)$ 上 $\mu_n \xrightarrow{\text{hypo}} \mu_0$，则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

证明　类似于定理 2.11 的证明.

推论 7　设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(E)$ 上的概率测度族，那么

(1) 若 $\mathscr{G}(E)\subset \text{cont}\mu_0$，则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$ 等价于在 $\mathscr{G}(E)$ 上 $\mu_n \xrightarrow{\text{epi}} \mu_0$.

(2) 若 $\mathscr{F}(E)\subset \text{cont}\mu_0$，则 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$ 等价于在 $\mathscr{F}(E)$ 上 $\mu_n \xrightarrow{\text{hypo}} \mu_0$.

证明　注意到推论 5，由定理 2.11、定理 2.12 易得.

定义 2.9　设 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{B}(E)$ 中的子集族，如果对于 $\mathscr{H}$ 中的任意序列 $\{S_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 都存在 $S_0\in\mathscr{H}$ 和 $\{S_{n_k}\}\subset S_n$，使得 $S_{n_k}\xrightarrow{R} S_0$，则称 $\mathscr{H}$ 为 R-紧的.

定理 2.13　设 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{F}(E)$ 上的概率测度族，$\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{B}(E)$ 上的 R-紧子族，且 $\mathscr{H}\subset \text{cont}\mu_0\cap\mathscr{B}(E)$，如果 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在子族上一致收敛于 μ_0，即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{S\in\mathscr{H}}\left|\mu_n(S)-\mu_0(S)\right|=0$$

证明　反证法. 假定 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在子族 $\mathscr{H}\subset \text{cont}\mu_0\cap\mathscr{B}(E)$ 上不一致收敛于 μ_0，即存在 $\varepsilon>0$，对一切的 n（或子序列 $\{n_k\}$），有

$$\sup_{S\in\mathscr{H}}\left|\mu_n(S)-\mu_0(S)\right|>2\varepsilon>0$$

对一切的 n，选取 S_n，使得

$$\left|\mu_n(S_n)-\mu_0(S_n)\right|>\varepsilon>0 \tag{20}$$

由于 $\mathscr{H}$ 是 R-紧的，因此存在 $S_0\in\mathscr{H}$，$\{S_{n_k}\}\subset S_n$，使得 $S_{n_k}\xrightarrow{R} S_0$. 注意到 $\mathscr{H}\subset \text{cont}\mu_0\cap\mathscr{B}(E)$，由推论 5，有

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{n_k}(S_{n_k})=\mu_0(S_0) \tag{21}$$

特别地，在推论 5 中令 $\mu_n\equiv\mu_0$，则有

$$\lim_{k\to\infty}\mu_0(S_{n_k})=\mu_0(S_0) \tag{22}$$

由（21）式与（22）式，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\left|\mu_{n_k}(S_{n_k})-\mu_0(S_{n_k})\right|=0 \tag{23}$$

于是（23）式与（20）式相互矛盾.

推论 8 设 E 是有限维线性空间，$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(E)$ 上的概率测度族，且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，假定在 $\mathscr{B}(E)$ 上任意的凸集为 μ_0- 连续集，则 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 在 E 的闭凸子集族 $\mathscr{F}_c(E)$ 上一致收敛于 μ_0.

证明 由于在 $\mathscr{B}(E)$ 上任意的凸集为 μ_0- 连续集，因此由凸分析知识（参见文献[114]），对任意的 $A\in\mathscr{F}_c(E)$，有

$$\mathrm{cl}A^{\circ}=A$$

由定理 2.3 不难知，

$$A_n\xrightarrow{R}A\Leftrightarrow A_n\xrightarrow{r}A$$

推论 8 直接由文献[64]推论 8 得出.

推论 9 设 E 是有限维线性空间，$\{F_0;\ F_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 是右连续概率分布函数族，使得 F_0 有连续的边际，$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 是与 $\{F_0;\ F_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 相联系的概率测度族，则下列陈述等价：

（1）$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$；

（2）分布函数 F_n 在 E 上一致收敛于 F_0.

证明 利用推论 8，仿照文献[64]推论 10 的证明易得.

3 期望泛函的收敛定理

本章首先证明了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理、控制收敛定理；其次给出了概率测度弱收敛的若干等价条件；最后，讨论了期望泛函序列的上图收敛性.

3.1 引 言

在求解带有连续型随机变量的随机规划问题时，除极少数问题外，通常采用某种离散化方法得到一系列（离散）随机变量序列，这些随机变量序列分布收敛于初始随机变量，从而将原问题转化为一系列确定性数学规划问题. 由于随机规划问题几乎都要涉及随机变量函数的期望泛函，因此对期望泛函序列性质的研究是一件很有意义的工作，而且许多研究者为此做了大量的工作，而期望泛函序列实际上是多元函数关于弱收敛概率测度序列的积分，文献[64]在多元函数序列等度有界的情形下，研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的下半收敛性；文献 [13] 在多元函数序列等度上有界的情形下，给出了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的上半收敛性.

本章在多元函数序列无界且半连续的情形下，并附加了一些条件，证明了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理、

控制收敛定理，得到了概率测度弱收敛的若干等价条件，并用其研究了期望泛函序列的上图收敛性.

设(E, d)是m维 Polish（波兰）空间，$\mathscr{B}(E)$表示E中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(E)$表示定义在$\mathscr{B}(E)$上的概率测度全体，$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$为定义在$(E, \mathscr{B}(E))$上取值在$[0, 1]$上的概率测度族，$C(E)$和$C_b(E)$分别表示$E$中的连续函数和有界连续函数全体，$\mathbf{N}$表示全体自然数组成的集合. 令$\{S_n\subset\mathscr{B}(E), n\in\mathbf{N}\}$，记

$$\limsup_{n\to\infty} S_n := \left\{x=\lim_{k\to\infty} x_k : x_k\in S_{n_k},\ \forall k,\ \{n_k\}\subset\mathbf{N}\right\}$$

定义 3.1 若$\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$为$E$中的下半连续函数族，且对任意的$x_0\in E$，$x_n\to x_0$，满足

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)\geqslant f_0(x_0)$$

则称$f_n(x)$下半连续收敛于$f_0(x)$；若$-f_n(x)$下半连续收敛于$-f_0(x)$，则称$f_n(x)$上半连续收敛于$f_0(x)$；若$f_n(x)$既上半连续又下半连续收敛于$f_0(x)$，则称$f_n(x)$连续收敛于$f_0(x)$.

定义 3.2 设$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$为$\mathscr{P}(E)$上的概率测度族，$\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$为$E$中的可测函数族，若对任意的$\varepsilon>0$，存在紧集$K_\varepsilon\subseteq E$，使得

$$\mu_n(E\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon \quad 且 \quad \int_{E\setminus K_\varepsilon}|f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots$$

则称$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$关于函数族$\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$为胎紧的.

3.2 极限定理

为了完成本节定理的证明，我们需要下列引理：

引理 1 若$\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$是等度有界的下半连续函数族，且$f_n(x)$下半连续收敛于$f_0(x)$，设$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$为概率测度族，且

$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{1}$$

定理 3.1 设概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为胎紧的，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，那么

（1）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，则有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{2}$$

（2）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，则有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{3}$$

（3）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明（1）对任意给定的正整数 M，令

$$f_n^M := f_n \wedge M\,,\quad f_n^{\varepsilon,M} := f_n^M I_{K_\varepsilon} + M I_{E\setminus K_\varepsilon}\,,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

则 f_0^M 是下半连续，$f_n^{\varepsilon,M}$ 下半连续收敛于 $f_0^{\varepsilon,M}$. 另一方面，由 $f_0(x)$ 的下半连续性，则 $a_\varepsilon := \min\limits_{x\in K_\varepsilon} f_0(x)$ 存在且有限. 而 f_n 下半连续收敛于 f_0，故

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{x\in K_\varepsilon} f_n(x) \geqslant \inf_{x\in K_\varepsilon} f_0(x)$$

于是对 $\varepsilon_0>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$f_n(x) \geqslant \inf_{x\in K_\varepsilon} f_n(x) \geqslant \inf_{x\in K_\varepsilon} f_0(x) - \varepsilon_0 = a_\varepsilon - \varepsilon_0\,,\quad \forall x\in K_\varepsilon$$

故 $f_n^{\varepsilon,M}$ 为等度下有界，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，由（1）式，有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n^{\varepsilon,M}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0^{\varepsilon,M}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{4}$$

利用（1）式和（4）式以及概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 的胎紧性，有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
\geqslant&\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
\geqslant&\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^{\varepsilon,M}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)+\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{E\setminus K_\varepsilon}f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)-M\mu_n(E\setminus K_\varepsilon)\right]\\
\geqslant&\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^{\varepsilon,M}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)+\liminf_{n\to\infty}\left[-\int_{E\setminus K_\varepsilon}|f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)-M\mu_n(E\setminus K_\varepsilon)\right]\\
\geqslant&\int_E f_0^{\varepsilon,M}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)-(1+M)\varepsilon\\
\geqslant&\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)-\int_{E\setminus K_\varepsilon}f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)-(1+M)\varepsilon\\
\geqslant&\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)-\int_{E\setminus K_\varepsilon}|f_0(x)|\mu_0(\mathrm{d}x)-(1+M)\varepsilon\\
\geqslant&\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)-(2+M)\varepsilon
\end{aligned}
$$

即

$$
\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)-(2+M)\varepsilon \tag{5}
$$

（5）式两边先令 $\varepsilon\to 0$，再利用 Fatou 引理，（5）式两边对 M 取下极限，有

$$
\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)
$$

（2）由 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，则 $-f_0$ 下半连续，$-f_n$ 下半连续收敛于 $-f_0$. 应用定理 3.1（1），有

$$
\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=-\liminf_{n\to\infty}\int_E -f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)
$$

（3）易知满足定理 3.1（3）的条件一定满足定理 3.1（1）和（2）的条件，比较（2）式，（3）式，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

定义 3.3　称 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为下一致可积，若

$$\lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:f_n(x)<-R\}}f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0$$

称 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为上一致可积，若 $\{-f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为下一致可积；称 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为一致可积，若 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 既上一致可积又下一致可积.

定理 3.2　若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，且 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在，那么

（1）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\tag{6}$$

（2）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\tag{7}$$

（3）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，且 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 一致可积，则有 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明（1）令

$$H_n=\{x:f_n(x)>-R\},\quad H_0=\{x:f_0(x)>-R\}$$

$$f_n^R:=f_n\wedge R,\quad f_n^{\pm R}:=(f_n\wedge R)\vee(-R),\quad n=0,1,2,\cdots$$

由 f_0 下半连续性知，H_0 为开集，又由 f_n 下半连续收敛于 f_0，则有

$$\limsup_{n\to\infty} H_n^c \subset H_0^c$$

而 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，由定理 1.1，有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(H_n) \geqslant \mu_0(H_0) \tag{8}$$

由（1）式，有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n^{\pm R}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0^{\pm R}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{9}$$

利用（8）式和（9）式，有

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) I_{H_n^c}\mu_n(\mathrm{d}x) + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) I_{H_n}\mu_n(\mathrm{d}x)\\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) I_{\{x: f_n(x)\leqslant -R\}}\mu_n(\mathrm{d}x) +\\
&\quad \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n^{\pm R}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) + R\liminf_{n\to\infty} \mu_n(H_n)\\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x: f_n(x)\leqslant -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) + \int_E f_0^{\pm R}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) + R\mu_0(H_0)\\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x: f_n(x)\leqslant -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) + \int_E f_0^{R}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

由 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 的下一致可积性，于是

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
&= \lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
&\geqslant \lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty} \int_{\{x: f_n(x)\leqslant -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) + \lim_{R\to+\infty} \int_E f_0^{R}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\\
&\geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

（2）由 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 的上一致可积

性，知 $\{-f_n(x), n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为下一致可积，仿照定理 3.1（2）的证明易得.

（3）由定义 3.3，并比较（6）式与（7）式直接得出.

3.3 控制收敛定理

定理 3.3 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，存在函数 $g(x)$，使得 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$，且概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于 $g(x)$ 为胎紧的，那么

（1）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（2）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明 由定理 3.1 知，只需证明概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为胎紧的. 因为概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于 $g(x)$ 为胎紧的，则由定义 1.11 知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K_\varepsilon\subseteq E$，使得

$$\mu_n(E\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon \tag{10}$$

且

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon}|g(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

又由于 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则对上述的 $\varepsilon>0$ 和紧集 $K_\varepsilon\subseteq E$，我们有

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon}|f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_{E\setminus K_\varepsilon}|g(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon\ ,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

由（10）式与（11）式知，概率测度族$\{\mu_0;\mu_n,n\in\mathbf{N}\}$关于函数族$\{f_0;f_n,n\in\mathbf{N}\}$为胎紧的.

定理 3.4 若$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，且$\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在，那么

（1）若f_0下半连续，f_n下半连续收敛于f_0，且存在关于概率测度族$\{\mu_n,n\in\mathbf{N}\}$下一致可积的$g(x)$，使得$f_n(x)\geqslant g(x)\ (n=1,2,\cdots)$，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{12}$$

（2）若f_0上半连续，f_n上半连续收敛于f_0，且存在关于概率测度族$\{\mu_n,n\in\mathbf{N}\}$上一致可积的$g(x)$，使得$f_n(x)\leqslant g(x)\ (n=1,2,\cdots)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{13}$$

（3）若f_n连续收敛于连续函数f_0，且存在关于概率测度族$\{\mu_n,n\in\mathbf{N}\}$一致可积的$g(x)$，使得$|f_n(x)|\leqslant g(x)\ (n=1,2,\cdots)$，则有$\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{14}$$

证明 （1）由定理 3.2 知，只需证明概率测度族$\{f_n(x),n\in\mathbf{N}\}$关于概率测度族$\{\mu_n,n\in\mathbf{N}\}$为下一致可积. 因为$g(x)$关于概率测度族$\{\mu_n,n\in\mathbf{N}\}$下一致可积，则由定义 3.3，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:g(x)<-R\}}g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0$$

又由于$f_n(x)\geqslant g(x)\ (n=1,2,\cdots)$，因此

$$0\geqslant\lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:f_n(x)<-R\}}f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$

$$\geqslant \lim_{R\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x:f_n(x)<-R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$

$$\geqslant \lim_{R\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x:g(x)<-R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = 0$$

于是

$$\lim_{R\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x:f_n(x)<-R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = 0$$

（2）类似于定理 3.1（2）的证明.

（3）易知满足定理 3.4（3）的条件一定满足定理 3.4（1）和（2）的条件，由（12）式和（13）式知（14）成立.

推论 1 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在，那么

（1）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 为等度下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（2）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 为等度上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 为等度有界，则有 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 可积，且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明 注意到（上，下）有界函数关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 必为（上，下）一致可积，由定理 3.4 显然.

3.4 概率测度弱收敛的若干等价条件

定理 3.5 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（4）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明 （1）$\Rightarrow$（2）、（3）、（4）．由定理 3.2 显然.

（2）$\Rightarrow$（1）对任意的 $G\in\mathscr{G}(E)$，令 $S_n \equiv S_0 = G$，则

$$\limsup_{n\to\infty} [S_n]^c \subset S^c \quad （S^c \text{表示} S \text{的余集}）$$

令 $f_n(x) = I_{S_n}(x)$，$f_0(x) = I_{S_0}(x)$，注意到 G 为开集，则 $f_n(x)$，$f_0(x)$ 满足定理 3.5（2）的条件，故

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) &= \liminf_{n\to\infty} \mu_n(S_n) = \liminf_{n\to\infty} \int_E I_{S_n}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \\
&= \int_E I_{S_0}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) = \mu_0(S_0) = \mu_0(G)
\end{aligned}$$

由定理 1.5 知，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

（3）$\Rightarrow$（1）．对任意的 $F\in\mathscr{F}(E)$，令 $S_n \equiv S_0 = F$，则

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \subset S$$

令 $f_n(x) = I_{S_n}(x)$，$f_0(x) = I_{S_0}(x)$，注意到 F 为闭集，则 $f_n(x)$, $f_0(x)$ 满

足定理 3.5（3）的条件，故

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)&=\limsup_{n\to\infty}\mu_n(S_n)=\limsup_{n\to\infty}\int_E I_{S_n}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\&=\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\\&=\int_E I_{S_0}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)=\mu_0(S_0)=\mu_0(F)\end{aligned}$$

由定理 1.5 可知，$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$.

（4）⇒（1）. 由定理 3.5 易知（4）⇒（2），（2）⇒（1）.

定理 3.6　在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

（1）$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$；

（2）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x)\geqslant g(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 上一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x)\leqslant g(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（4）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$，使得 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明　（1）⇒（2）、（3）、（4）. 由定理 3.4 显然.

（2）、（3）、（4）⇒（1）. 在定理 3.5 的证明中，再分别令 $g(x)=0$、$g(x)=1$ 即得.

推论 2　在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

（1） $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）若 f_0 下半连续，f_n 下半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x), n\in\mathbf{N}\}$ 为等度下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（3）若 f_0 上半连续，f_n 上半连续收敛于 f_0，且 $\{f_n(x), n\in\mathbf{N}\}$ 为等度上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（4）若 f_n 连续收敛于连续函数 f_0，且 $\{f_n(x), n\in\mathbf{N}\}$ 为等度有界，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

证明 由推论 1 及定理 3.5 显然.

3.5 期望泛函序列的上图收敛性

定理 3.7 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 一致可积的 β 和 $h\in C(E)$，使得 $|f(x, \xi)|\leqslant h(x)\beta(\xi)$，那么

（1）若 $f(x, \xi)$ 在 $R^n\times E$ 上下半连续，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi)\xrightarrow{l.s.c}\int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi) \tag{15}$$

（2）若 $f(x, \xi)$ 在 $R^n\times E$ 上上半连续，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi)\xrightarrow{u.s.c}\int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi) \tag{16}$$

（3）若 $f(x, \xi)$ 在 $R^n\times E$ 上连续，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi)\xrightarrow{u}\int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi) \tag{17}$$

其中 $\xrightarrow{l.s.c}$、$\xrightarrow{u.s.c}$、$\xrightarrow{u}$ 分别表示下半连续收敛、上半连续收敛、连续收敛.

证明 (1) 对任意的 $x_0 \in R^n$，且 $x_n \to x_0$，令

$$g_n(\xi) := f(x_n, \xi), \quad g_0(\xi) := f(x_0, \xi)$$

由 f 的下半连续性，则 g_n 下半连续收敛于 g_0. 由 $h(x)$ 的连续性知，存在 $M > 0$，当 n 充分大时

$$|h(x_n)| \leqslant M \quad \text{且} \quad |h(x_n)\beta(\xi)| \leqslant M\beta(\xi)$$

由 β 关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 的一致可积性知，$M\beta(\xi)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 一致可积. 由定理 3.4（1），有

$$\liminf_{n \to \infty} \int_E f(x_n, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \geqslant \int_E f(x_0, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

于是

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{l.s.c} \int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

(2) 注意到定理 3.7 的条件（2），结合定理 3.7（1） 的证明过程及定理 3.4（2）易得.

(3) 易知满足定理 3.7（3）的条件一定满足定理 3.7（1）和（2）的条件，由（15）式与（16）式及定义 3.1 显然.

定理 3.8 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 胎紧的 β 和 $h \in C(E)$，使得 $|f(x, \xi)| \leqslant h(x)\beta(\xi)$，那么

(1) 若 $f(x, \xi)$ 在 $R^n \times E$ 上下半连续，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{l.s.c} \int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi) \tag{18}$$

(2) 若 $f(x, \xi)$ 在 $R^n \times E$ 上上半连续，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{u.s.c} \int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi) \tag{19}$$

(3) 若 $f(x, \xi)$ 在 $R^n \times E$ 上连续，则有

$$\int_E f(x,\xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{u} \int_E f(x,\xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi) \tag{20}$$

证明 (1) 对任意的 $x_0 \in R^n$，且 $x_n \to x_0$，令

$$g_n(\xi) := f(x_n, \xi), \quad g_0(\xi) := f(x_0, \xi)$$

由 f 的下半连续性，则 g_n 下半连续收敛于 g_0. 由 $h(x)$ 的连续性知，存在 $M > 0$，当 n 充分大时，

$$|h(x_n)| \leqslant M \quad \text{且} \quad |h(x_n)\beta(\xi)| \leqslant M\beta(\xi)$$

由 β 关于概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 的胎紧性知，$M\beta(\xi)$ 关于概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 为胎紧的，从而由定理 3.3（1），有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f(x_n, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \geqslant \int_E f(x_0, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

于是

$$\int_E f(x,\xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{l.s.c} \int_E f(x,\xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

（2）注意到定理 3.8 的条件（2），结合定理 3.8（1）的证明过程及定理 3.8（2）易得.

（3）易知满足定理 3.8（3）的条件一定满足定理 3.8（1）和（2）的条件，由（18）式与（19）式及定义 3.1 显然.

定义 3.4 设 $\{f_0; f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 是定义在 R^n 取值在 $\overline{R}$ 的函数族，若对任意的 $x_0 \in R^n$，且满足

（1）$x_n \to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) \geqslant f_0(x_0) \tag{21}$$

（2）存在某个 $x_n \to x_0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) \geqslant f_0(x_0) \tag{22}$$

则称函数序列 $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ 上图收敛于 f_0，记为 $f_n \xrightarrow{\text{epi}} f_0$.

定理 3.9 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，$\int_E \beta(\xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$ 存在，且满足：

（1）$f(x, \xi)$ 在 $R^n \times E$ 上下半连续，且对每个固定的 x，$f(x,\cdot)$ 上半连续.

（2）存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 一致可积的 β 和 $h \in C(E)$，使得 $|f(x,\xi)| \leqslant h(x)\beta(\xi)$，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{\text{epi}} \int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

证明 对任意的 $x_0 \in R^n$，且 $x_n \to x_0$，由定理 3.7（1），有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f(x_n, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \geqslant \int_E f(x_0, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

令 $x_n \equiv x_0$，则

$$g_n(\xi) := f(x_n, \xi), \quad g_0(\xi) := f(x_0, \xi)$$

由 $f(x,\cdot)$ 上半连续性知，g_n 上半连续收敛于 g_0，由定理 3.7（2），有

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f(x_n, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \leqslant \int_E f(x_0, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

结合（21）式与（22）式，由定义 3.4 知结论成立.

定理 3.10 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且满足：

（1）$f(x, \xi)$ 在 $R^n \times E$ 上下半连续，且对每个固定的 x，$f(x,\cdot)$ 上半连续.

（2）存在关于概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 胎紧的 β 和 $h \in C(E)$，使得 $|f(x, \xi)| \leqslant h(x)\beta(\xi)$，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi) \xrightarrow{\text{epi}} \int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

证明 利用定理 3.8，结合定理 3.9 的证明易得.

推论 3 设 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，$\int_E \beta(\xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$ 存在，且满足：

（1）$f(x, \xi)$ 在 $R^n \times E$ 上下半连续，且对每个固定的 x，$f(x,\cdot)$ 上半连续.

（2）存在关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$一致可积的$\beta$及常数$C$，使得$|f(x, \xi)|\leqslant C\beta(\xi)$，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi)\xrightarrow{\text{epi}}\int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

证明 由定理 3.9 显然.

推论 4 设$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，且满足：

（1）$f(x, \xi)$在$R^n\times E$上下半连续，且对每个固定的x，$f(x,\cdot)$上半连续.

（2）存在关于概率测度族$\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$为胎紧的$\beta$及常数$C$，且$|f(x, \xi)|\leqslant C\beta(\xi)$，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi)\xrightarrow{\text{epi}}\int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

证明 由定理 3.10 显然.

推论 5 设$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，$\int_E\|\xi\|\mu_0(\mathrm{d}\xi)$存在，且满足：

（1）$f(x, \xi)$在$R^n\times E$ 上下半连续，且对每个固定的x，$f(x,\cdot)$上半连续.

（2）$\|\xi\|$关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$一致可积，且存在常数$C$，使得$|f(x, \xi)|\leqslant C\|\xi\|$，则有

$$\int_E f(x, \xi)\mu_n(\mathrm{d}\xi)\xrightarrow{\text{epi}}\int_E f(x, \xi)\mu_0(\mathrm{d}\xi)$$

证明 由定理 3.9 显然.

4 积分泛函算子的收敛定理

本章将积分泛函算子定义域中的无界且半连续函数空间扩张到更一般的可测函数空间，并在较弱的条件下，证明了这种积分泛函算子的（上半、下半）收敛定理、控制收敛定理及其推广形式的（上半、下半）收敛定理、控制收敛定理，并给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件.

4.1 引　言

随机规划的稳定性问题实质上是寻求函数空间中的函数收敛序列分别对概率测度空间中的弱收敛概率测度序列积分的收敛性. 而这种积分可以看做是概率测度空间与函数空间的内积运算，这种内积运算实际上是概率测度空间与函数空间的乘积空间上的积分泛函算子. 古典积分泛函算子的收敛性是在半连续函数空间与概率测度空间的乘积空间上研究的. 文献[64]研究了有界下半连续函数空间与概率测度空间的乘积空间上积分泛函算子的下半收敛性；本书作者给出了无界（上半、下半）连续函数空间与概率测度空间的乘积空间上积分泛函算子的收敛性；文献[12]在概率测度序列关于可测函数序列等度胎紧的情形下，研究了积分泛函算子的（上半、下半）收敛性.

本章将积分泛函算子定义域中的无界且半连续函数空间扩张到更一般的可测函数空间，并在概率测度序列关于可测函数序列弱（上、下）等度胎紧以及可测函数序列关于概率测度序列（上、下）一致可积的情形下，证明了这种积分泛函算子的（上半、下半）收敛性定理、控制收敛定理及其推广形式的（上半、下半）收敛性定理、控制收敛定理，并得到了概率测度弱收敛的若干新的等价条件，进而推广并改进了文献 [12, 64] 中的相应结果.

设 (E, d) 是 m 维 Polish（波兰）空间，$\mathscr{B}(E)$ 表示 E 中的 Borel 子集全体，$M(E)$ 表示 E 中的可测函数全体，$\mathscr{P}(E)$ 表示定义在 $\mathscr{B}(E)$ 上的概率测度全体，$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 为定义在 $(E, \mathscr{B}(E))$ 上取值在 $[0, 1]$ 上的概率测度族，$M(E)\times\mathscr{P}(E)$ 表示可测函数空间 $M(E)$ 与概率测度空间 $\mathscr{P}(E)$ 的乘积空间，$I(f, \mu)=\int_E f\mu(\mathrm{d}x)$ 表示乘积空间 $M(E)\times\mathscr{P}(E)$ 上的积分泛函算子，这里 $f\in M(E)$，$\mu\in\mathscr{P}(E)$，允许 $I(f, \mu)=+\infty$ 或 $I(f, \mu)=-\infty$. $\mathbf{N}$ 表示全体自然数组成的集合. 令 $\{S_n\subset\mathscr{B}(E),\ n\in\mathbf{N}\}$，记

$$\limsup_{n\to\infty} S_n := \left\{x=\lim_{n\to\infty} x_k : x_k\in S_{n_k}, \forall k,\ \{n_k\}\subset\mathbf{N}\right\}$$

定义 4.1 设 $\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为 $M(E)$ 中的函数族，若对任意的 $x_0\in E$，$x_n\to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)\geqslant f_0(x_0)$$

则称 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_n(x)$；若 $-f_n(x)$ 下半连续收敛于 $-f_0(x)$，则称 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$；若 $f_n(x)$ 既上半连续又下半连续收敛于 $f_0(x)$，则称 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$.

本章的主要目的是分别在概率测度序列 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 弱收敛于 μ_0 以及可测函数序列 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$（上半、下半）连续收敛于 $f_0(x)$ 的意义上，研究积分泛函算子序列 $\{I(f_n, \mu_n);\ n=0, 1, 2, \cdots\}$（上半、下半）收敛于 $I(f_0,\mu_0)$ 的情形. 为了保证积分泛函算子序列的（半）

收敛性，我们首先引入下列概念：

定义 4.2 设 $\{(f_n, \mu_n); n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为 $M(E)\times\mathscr{P}(E)$ 中的子集，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在可测集 $K_\varepsilon\subseteq E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$，使得

(1) $f_n(x)\geqslant -b_\varepsilon, \forall x\in K_\varepsilon$； (1)

(2) $\int_{E\setminus K_\varepsilon}|f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon$， $n=0, 1, 2, \cdots$ (2)

则称概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为弱下等度胎紧的. 若概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{-f_0; -f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为弱下等度胎紧的，则称概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{-f_0; -f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为弱上等度胎紧的；若概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 既弱上等度胎紧又弱下等度胎紧，则称概率测度族 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧的.

除特别声明外，本章所述的函数均指可测函数.

4.2 积分泛函算子序列的收敛定理

为了完成本节定理的证明，我们首先给出下列引理：

引理 1 若 $\{f_0; f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 是等度下有界的函数族，且 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$. 设 $\{\mu_0; \mu_n, n\in\mathbf{N}\}$ 为概率测度族，且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，则

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n)\geqslant I(f_0, \mu_0) \tag{3}$$

证明 由于 $\{f_0; f_n, n\in\mathbf{N}\}$ 是等度下有界的函数族，不失一般性，我们假定函数 $f_n\geqslant 0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 对任意给定的正整数 M，N，令 $f_n^M := f_n\wedge M$ 且定义可测集

$$G_i^n := \left\{x\in E: f_n(x)\geqslant \frac{i}{N}\right\}, \quad i=0, 1, 2, \cdots, MN$$

$$G_i^0 := \left\{x\in E: f_0(x)\geqslant \frac{i}{N}\right\}, \quad i=0, 1, 2, \cdots, MN$$

不难验证

$$\frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{MN}\mu_0(G_i^0)+1\right]\geqslant\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

且

$$\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{MN}\mu_n(G_i^n)$$

由于 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sup(G_i^n)^c\subset(G_i^0)^c$$

由定理 1.1 知，对每一 i，均有

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(G_i^n)\geqslant\mu_0(G_i^0)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)&\leqslant\frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{MN}\mu_0(G_i^0)+1\right]\leqslant\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{MN}\mu_n(G_i^n)+1\right]\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)+\frac{1}{N}\end{aligned}\qquad(4)$$

于是（4）式两边对 N 取极限，得

$$\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$

再利用单调收敛定理，两边对 M 取极限，有

$$\begin{aligned}\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)&\leqslant\lim_{M\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

注：（1）引理 1 推广并改进了文献[64]的定理 5.

（2）可测函数序列 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，则 $f_0(x)$ 不一定是下半连续的.

例 1 设

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(-1,\ -\dfrac{1}{n}\right],\\ 1, & x\in\left(-1,\ -\dfrac{1}{n}\right],\end{cases}\qquad f_0(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3}\right]\\ 1, & x\in\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3}\right]\end{cases}$$

显然可测函数序列 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，而 $f_0(x)$ 不是下半连续的.

定理 4.1 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，那么

(1)若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，且概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为弱下等度胎紧的，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)\geqslant I(f_0,\ \mu_0) \tag{5}$$

(2)若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，且概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为弱上等度胎紧的，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)\leqslant I(f_0,\ \mu_0) \tag{6}$$

(3) 若 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$，且概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧的，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 (1) 由概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 的弱下等度胎紧性，则对 $\varepsilon>0$，存在可测集 $K_\varepsilon\subseteq E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$，使得 $\forall x\in K_\varepsilon$ 时，有

$$f_n(x)\geqslant -b_\varepsilon,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

令 $f_n^{-b_\varepsilon}:=f_n\vee(-b_\varepsilon)$，则

$$\left|f_n^{-b_\varepsilon}\right|\leqslant\left|f_n\right|$$

且对一切的 $\forall x\in K_\varepsilon\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，有

$$f_n^{-b_\varepsilon} = f_n$$

利用（2）式，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\right| \\
&= \left|\int_{E\setminus K_\varepsilon} [f_n(x) - f_n^{-b_\varepsilon}(x)]\mu_n(\mathrm{d}x)\right| \\
&\leqslant 2\int_{E\setminus K_\varepsilon} |f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x) < 2\varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (7)
\end{aligned}$$

由 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，则 $f_n^{-b_\varepsilon}$ 下半连续收敛于 $f_0^{-b_\varepsilon}$ 且 $f_n^{-b_\varepsilon}$ 为等度下有界，又 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，由（3）式，有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \qquad (8)$$

于是结合（7）式，有

$$\begin{aligned}
&\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \\
&= \left[\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\right] + \\
&\quad \left[\int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_0^{-b_\varepsilon}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\right] + \\
&\quad \left[\int_E f_0^{-b_\varepsilon}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) - \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\right] \\
&\geqslant \left[\int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_0^{-b_\varepsilon}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\right] - 2\varepsilon \qquad (9)
\end{aligned}$$

（9）式两边先对 n 取下极限，再令 $\varepsilon \to 0$，并利用（8）式，有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

（2）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，且概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为弱上等度胎紧的，则 $-f_n(x)$ 下半连续收敛于 $-f_0(x)$，且概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{-f_0;\ -f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 为弱下等度胎紧的．由定理 4.1（1），有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=-\liminf_{n\to\infty}\int_E -f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$
$$\leqslant \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$$

故（6）式成立.

（3）易知满足定理 4.1（3）的条件一定满足定理 4.1（1）和（2）的条件，比较（5）式与（6）式，有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0)$$

注：定理 4.1 推广并改进了定理 3.1.

为了得到定理 4.1 的推广形式，我们必须引入下列定义：

定义 4.3 如果 $M(E)$ 中的函数 $f_0:E\to R$ 满足对任意的 $x\in E$，有

$$\underline{f_0}(x):=\liminf_{y\to x} f_0(y)$$

则称 $\underline{f_0}(x)$ 为函数 f_0 的下闭包；如果对任意的 $x\in E$，有

$$\overline{f_0}(x):=\limsup_{y\to x} f_0(y)$$

则称 $\overline{f_0}(x)$ 为函数 f_0 的上闭包. $f_0(x)$ 的下半不连续点集、上半不连续点集、不连续点集分别记为 LD_{f_0}、UD_{f_0}、D_{f_0}.

注：函数 f_0 的下半不连续点集 LD_{f_0} 可以表示为 $\left\{x:f_0>\underline{f_0}\right\}$，函数 f_0 的上半不连续点集 UD_{f_0} 可以表示为 $\left\{x:f_0<\overline{f_0}\right\}$，函数 f_0 的不连续点集 D_{f_0} 可以表示为 $\left\{x:f_0>\underline{f_0}\right\}\cup\left\{x:f_0<\overline{f_0}\right\}$.

定理 4.2 若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，那么

（1）若 $f_n(x)$ 下半连续收敛到 $\underline{f_0}(x)$，概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\left\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为弱下等度胎紧的，且 $\mu_0(LD_{f_0})=0$，函数族 $\left\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 在 LD_{f_0} 上等度下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)\geqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（2）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $\overline{f_0}(x)$，概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\left\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为弱上等度胎紧的，且 $\mu_0(UD_{f_0})=0$，函数族 $\left\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 在 UD_{f_0} 上等度上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)\leqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（3）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛 $\overline{f_0}(x)$ 又下半连续收敛于 $\underline{f_0}(x)$，概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\left\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为弱等度胎紧的，且 $\mu_0(D_{f_0})=0$，函数族 $\left\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 在 D_{f_0} 上等度有界，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 （1）由题设知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在可测集 $K_\varepsilon\subseteq E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$ 及 M，使得对 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，均有

$$f_n(x)\geqslant -b_\varepsilon,\quad \forall x\in K_\varepsilon$$

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon}\left|f_n(x)\right|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon \quad 且 \quad f_n(x)\geqslant M,\quad \forall x\in LD_{f_0}$$

令 $K_\varepsilon^*=K_\varepsilon\bigcup LD_{f_0}$，$b_\varepsilon^*=b_\varepsilon\vee -M>0$，则有

$$f_n(x)\geqslant -b_\varepsilon^*,\ \forall x\in K_\varepsilon^*,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \ 且\ \underline{f_0}(x)\geqslant -b_\varepsilon^*,\ \forall x\in K_\varepsilon^* \tag{10}$$

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon^*}\left|f_n(x)\right|\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant \int_{E\setminus K_\varepsilon}\left|f_n(x)\right|\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{11}$$

注意到 $\mu_0(LD_{f_0})=0$，易知

$$\begin{cases}\displaystyle\int_E \underline{f}_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\\ \displaystyle\int_{E\setminus K_\varepsilon}\left|\underline{f_0}(x)\right|\mu_0(\mathrm{d}x)=\int_{E\setminus K_\varepsilon}\left|f_0(x)\right|\mu_0(\mathrm{d}x)\end{cases} \tag{12}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{E\setminus K_\varepsilon^*}\left|\underline{f_0}(x)\right|\mu_0(\mathrm{d}x)&=\int_{E\setminus K_\varepsilon}\left|\underline{f_0}(x)\right|\mu_0(\mathrm{d}x)\\&=\int_{E\setminus K_\varepsilon}\left|f_0(x)\right|\mu_0(\mathrm{d}x)<\varepsilon\end{aligned} \tag{13}$$

由（10）式、（11）式与（13）式知，概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\left\{\underline{f}_0; f_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为弱下等度胎紧的. 利用定理 4.1（1），并应用（12）式直接得出.

（2）类似于定理 4.2（1）的证明.

（3）注意到 $UD_{f_0}\subset D_{f_0}$ 且 $UD_{f_0}\subset D_{f_0}$，由 $\mu_0(D_{f_0})=0$，则

$$\mu_0(LD_{f_0})=0 \quad 且 \quad \mu_0(UD_{f_0})=0$$

并由定理 4.2（1）和（2）可得定理 4.2（3）.

推论 1　若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，那么

（1）若概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于可测函数 f 为弱下等度胎紧的，且 $\mu_0(D_f)=0$，函数 f 在 LD_f 上下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f,\ \mu_n)\geqslant I(f,\ \mu_0) \tag{14}$$

（2）若概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于可测函数 f 为弱上等度胎紧的，且 $\mu_0(UD_f)=0$，函数 f 在 UD_f 上上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f,\ \mu_n)\leqslant I(f,\ \mu_0) \tag{15}$$

（3）若概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 关于可测函数 f 为弱等度胎紧的，且 $\mu_0(D_f)=0$，函数 f 在 D_f 上有界，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f,\ \mu_n)=I(f,\ \mu_0)$$

证明　在定理 4.2 中，令 $f_n\equiv f_0=f$ 即可.

定义 4.4　设 $\left\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为 $M(E)$ 中的函数族，$\left\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为 $P(E)$ 上的概率测度族，若

$$\lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:f_n(x)<-R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0$$

则称 $\left\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 关于概率测度族 $\left\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为下一致可积；若 $\left\{-f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 关于概率测度族 $\left\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为下一致可积，则称 $\left\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 关于概率测度族 $\left\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 为上一致可积；若

$\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$既上一致可积又下一致可积，则称$\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$为一致可积.

定理 4.3 若$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且$I(f_0, \mu_0)$存在，那么

(1) 若$f_n(x)$下半连续收敛于$f_0(x)$，且$\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

(2) 若$f_n(x)$ 上半连续收敛于$f_0(x)$，且$\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0)$$

(3) 若$f_n(x)$连续收敛于$f_0(x)$，且$\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$关于概率测度族$\{\mu_n, n\in\mathbf{N}\}$一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) = I(f_0, \mu_0)$$

证明 (1) 令$H_n=\{x: f_n(x)>-R\}$，$H_0=\{x: f_0(x)>-R\}$，由$f_n(x)$下半连续收敛于$f_0(x)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty} H_n^c \subset H_0^c$$

而$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，由定理 1.1，有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(H_n) \geqslant \mu_0(H_0) \tag{16}$$

另一方面，令$f_n^{-R} := f_n \vee (-R)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则f_n^{-R}下半连续收敛于f_0^{-R}. 由 (3) 式，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n^{-R}(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_E f_0^{-R}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{17}$$

利用 (16) 和 (17) 式，有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) I_{H_n^c} \mu_n(\mathrm{d}x) + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) I_{H_n} \mu_n(\mathrm{d}x) \\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) I_{\{x: f_n(x) \leqslant -R\}} \mu_n(\mathrm{d}x) + \\
&\quad \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n^{-R}(x) \mu_n(\mathrm{d}x) + R \liminf_{n\to\infty} \mu_n(H_n) \\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x: f_n(x) \leqslant -R\}} f_n(x) \mu_n(\mathrm{d}x) + \int_E f_0^{-R}(x) \mu_0(\mathrm{d}x) + R\mu_0(H_0) \\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x: f_n(x) \leqslant -R\}} f_n(x) \mu_n(\mathrm{d}x) + \int_E f_0(x) \mu_0(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

由 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 的下一致可积性，于是

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mu_n(\mathrm{d}x) \\
&= \lim_{R\to+\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \mu_n(\mathrm{d}x) \\
&\geqslant \lim_{R\to+\infty} \liminf_{n\to\infty} \int_{\{x: f_n(x) \leqslant -R\}} f_n(x) \mu_n(\mathrm{d}x) + \lim_{R\to+\infty} \int_E f_0(x) \mu_0(\mathrm{d}x) \\
&\geqslant \int_E f_0(x) \mu_0(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

(2) 由 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 的上一致可积性知，$\{-f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为下一致可积，仿照定理 4.1（2）的证明易得.

(3) 由定义 4.3，并比较（14）式与（15）式直接得出.

定理 4.4 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $I(f_0, \mu_0)$ 存在，那么

(1) 若 $\mu_0(LD_{f_0}) = 0$，$f_n(x)$ 下半连续收敛于 $\underline{f_0}(x)$，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积，则有

$$
\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0) \tag{18}
$$

(2) 若 $\mu_0(UD_{f_0}) = 0$，$f_n(x)$ 上半连续收敛于 $\overline{f_0}(x)$，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上一致可积，则有

$$
\limsup_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0) \tag{19}
$$

（3）若 $\mu_0(D_{f_0})=0$，$f_n(x)$ 上半连续收敛于 $\overline{f_0}(x)$ 又下半连续收敛于 $\underline{f_0}(x)$，且 $\{f_n(x), n\in\mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in N\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0) \tag{20}$$

证明 （1）注意到 $LD_{f_0}=\left\{x: f_0>\underline{f_0}\right\}$，由 $\mu_0(LD_{f_0})=0$，易知

$$\int_E \underline{f}_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \tag{21}$$

应用（14）式，并由（21）式直接得出.

（2）类似于定理 4.4（1）的证明.

（3）注意到 $LD_{f_0}\subset D_{f_0}$ 且 $UD_{f_0}\subset D_{f_0}$，由 $\mu_0(D_{f_0})=0$，则

$$\mu_0(UD_{f_0})=0 \quad 且 \quad \mu_0(LD_{f_0})=0$$

并由（18）式与（19）式可得（20）式.

推论 2 若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，且 $I(f_0,\ \mu_0)$ 存在，那么

（1）若 $\mu_0(LD_{f_0})=0$，且 $f_0(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_0,\ \mu_n)\geqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（2）若 $\mu_0(UD_{f_0})=0$，$f_0(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_0,\ \mu_n)\leqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（3）若 $\mu_0(D_{f_0})=0$，$f_0(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in\mathbf{N}\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_0,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0)$$

4.3 积分泛函算子序列的控制收敛定理

定理 4.5 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧的 $g(x)$，使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x)\ (n=0,1,2,\cdots)$，那么

（1）若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) \geqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（2）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) \leqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（3）若 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) = I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 由定理 4.1 知，只需证明概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧即可．因为概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 关于 $g(x)$ 为弱等度胎紧的，则由定义 4.2 知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在可测集 $K_\varepsilon \subseteq E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$，使得

$$|g(x)| \leqslant b_\varepsilon, \quad \forall x\in K_\varepsilon$$

且

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon} |g(x)|\mu_n(\mathrm{d}x) < \varepsilon, \quad n=0,1,2,\cdots$$

又由于 $|f_n(x)| \leqslant g(x)\ (n=0,1,2,\cdots)$，则对上述的 $\varepsilon>0$ 和可测集 $K_\varepsilon \subseteq E$ 及常数 $b_\varepsilon>0$，我们有

$$|f_n(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant b_\varepsilon, \quad \forall x\in K_\varepsilon \tag{22}$$

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon} |f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_{E\setminus K_\varepsilon} |g(x)|\mu_n(\mathrm{d}x) < \varepsilon,\ n=0,1,2,\cdots \tag{23}$$

由（22）式与（23）式知，概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧的．证毕．

定理 4.6 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 为胎紧的连续函数 $g(x)$，使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$，那么

（1）若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) \geqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（2）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) \leqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

（3）若 $f_n(x)$ 连续收敛于可测函数 $f_0(x)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) = I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 （1）由定理 4.5 知，只需证明概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧的. 因为概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 关于 $g(x)$ 为胎紧的，则由定义 1.11 知，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $K_\varepsilon \subseteq E$，使得

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon} |g(x)| \mu_n(\mathrm{d}x) < \varepsilon,\quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

又由于 $g(x)$ 连续，且 $|f_n(x)| \leqslant g(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$，则对上述的 $\varepsilon > 0$ 和紧集 $K_\varepsilon \subseteq E$ 及常数 $b_\varepsilon := \max_{x\in K_\varepsilon} g(x)$，我们有

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \leqslant \max_{x\in K_\varepsilon} g(x) = b_\varepsilon,\quad \forall x \in K_\varepsilon \tag{24}$$

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon} |f_n(x)| \mu_n(\mathrm{d}x) \leqslant \int_{E\setminus K_\varepsilon} |g(x)| \mu_n(\mathrm{d}x) < \varepsilon,\ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{25}$$

由（24）式与（25）式知，概率测度族 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 为弱等度胎紧的.

（2）和（3）的证明类似（1）.

定理 4.7 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $I(f_0, \mu_0)$ 存在，那么

（1）若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$ 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x) \geqslant g(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$，

则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0) \tag{26}$$

（2）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x)\leqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0) \tag{27}$$

（3）若 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$，使得 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) = I(f_0, \mu_0) \tag{28}$$

证明 （1）由定理 4.3 知，只需证明函数族 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 为下一致可积. 因为 $g(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积，则由定义 4.4，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:g(x)\leqslant -R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0$$

又由 $f_n(x)\geqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，因此

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant \lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:f_n(x)\leqslant -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
&\geqslant \lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:f_n(x)\leqslant -R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\
&\geqslant \lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:g(x)\leqslant -R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{R\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:f_n(x)\leqslant -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0$$

（2）类似于定理 4.1（2）的证明.

（3）易知满足定理 4.7（3）的条件一定满足定理 4.7（1）和（2）

的条件，由（26）式和（27）式知（28）成立.

推论 3 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $I(f_0, \mu_0)$ 存在，那么

（1）若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，且函数族 $\{f_n(x), n \in \mathbf{N}\}$ 等度下有界，则有

$$\liminf_{n \to \infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

（2）若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，且函数族 $\{f_n(x), n \in \mathbf{N}\}$ 等度上有界，则有

$$\limsup_{n \to \infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0)$$

（3）若 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$，且函数族 $\{f_n(x), n \in \mathbf{N}\}$ 等度有界，则有

$$\lim_{n \to \infty} I(f_n, \mu_n) = I(f_0, \mu_0)$$

证明 注意到（上，下）有界函数关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 必为（上，下）一致可积，由定理 4.7 显然.

定理 4.8 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $I(f_0, \mu_0)$ 存在，那么

（1）若 $\mu_0(LD_{f_0}) = 0$，$f_n(x)$ 下半连续收敛于 $\underline{f_0}(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x) \geqslant g(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\liminf_{n \to \infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

（2）若 $\mu_0(UD_{f_0}) = 0$，$f_n(x)$ 上半连续收敛于 $\overline{f_0}(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x) \leqslant g(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\limsup_{n \to \infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0)$$

（3）若 $\mu_0(D_{f_0}) = 0$，$f_n(x)$ 下半连续收敛于 $\overline{f_0}(x)$ 又上半连续收敛于 $\underline{f_0}(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$，使得

$|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) = I(f_0, \mu_0)$$

证明 利用定理 4.4，并结合定理 4.7 的证明易得.

推论 4 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且 $I(f_0,\mu_0)$ 存在，那么

(1) 若 $\mu_0(LD_{f_0})=0$，且 $f_0(x)$ 为下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_0, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

(2) 若 $\mu_0(UD_{f_0})=0$，且 $f_0(x)$ 为上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_0, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0)$$

(3) 若 $\mu_0(D_{f_0})=0$，且 $f_0(x)$ 有界，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_0, \mu_n) = I(f_0, \mu_0)$$

证明 由定理 4.8 易得.

4.4 概率测度弱收敛的若干新的等价条件

定理 4.9 在 $I(f_0,\mu_0)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

(2) 若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

(3) 若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，且 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0)$$

（4）若 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$，且 $\{f_n(x),\ n\in \mathbf{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 (1)⇒(2)、(3)、(4)．由定理 4.3 显然．

(2)⇒(1)．对任意序列 $\{S;\ S_n,\ n\in \mathbf{N}\}\subset \mathscr{B}(E)$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}[S_n]^c\subset S^c \quad （S^c\text{ 表示 } S \text{ 的余集}）$$

令 $S_0^c=\limsup\limits_{n\to\infty}[S_n]^c$，$f_n(x)=I_{S_n}(x)$，$f_0(x)=I_{S_0}(x)$，注意到 S_0 为开集，则 $f_n(x)$，$f_0(x)$ 满足定理 4.9（2）的条件，故

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\mu_n(S_n)&=\liminf_{n\to\infty}\int_E I_{S_n}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\&=\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\\&=\int_E I_{S_0}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)=\mu_0(S_0)=\mu_0(S)\end{aligned}$$

由定理 1.1 知，$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$．

(3)⇒(1)．对任意序列 $\{S;\ S_n, n\in \mathbf{N}\}\subset \mathscr{B}(E)$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}S_n\subset S$$

令 $S_0=\limsup\limits_{n\to\infty}S_n$，$f_n(x)=I_{S_n}(x)$，$f_0(x)=I_{S_0}(x)$，注意到 S_0 为闭集，则

$$f_n(x)=I_{S_n}(x)，\quad f_0(x)=I_{S_0}(x)$$

且满足定理 4.9（3）的条件，故

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mu_n(S_n)&=\limsup_{n\to\infty}\int_E I_{S_n}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\&=\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leqslant\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\\&=\int_E I_{S_0}(x)\mu_0(\mathrm{d}x)=\mu_0(S_0)\leqslant\mu_0(S)\end{aligned}$$

由定理 1.1 知，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

(4)⇒(1). 由定理 4.9，易知 (4)⇒(2)，(2)⇒(1).

定理 4.10　在 $I(f_0, \mu_0)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

(2) 若 $f_n(x)$ 下半连续收敛于 $f_0(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x) \geqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

(3) 若 $f_n(x)$ 上半连续收敛于 $f_0(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 上一致可积的 $g(x)$，使得 $f_n(x) \leqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \leqslant I(f_0, \mu_0)$$

(4) 若 $f_n(x)$ 连续收敛于 $f_0(x)$，且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \mathbf{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$，使 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) = I(f_0, \mu_0)$$

证明　(1)⇒(2)、(3)、(4). 由定理 4.7 显然.

(2)、(3)、(4)⇒(1). 在定理 4.9 的证明中再分别令 $g(x)=0$、$g(x)=1$，并结合定理 4.9 的证明易得.

推论 5　在 $I(f_0, \mu_0)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

(2) 若 $f_n(x)$ 下半连续收敛到 $f_0(x)$，且函数族 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 等度下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f_n, \mu_n) \geqslant I(f_0, \mu_0)$$

(3) 若 $f_n(x)$ 上半连续收敛到 $f_0(x)$，且函数族 $\{f_n(x), n\in \mathbf{N}\}$ 等度上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) \leqslant I(f_0,\ \mu_0)$$

(4)若 $f_n(x)$ 连续收敛到 $f_0(x)$，且函数族 $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 等度有界，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) = I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 由定理 4.9 显然.

推论 6 在 $I(f,\ \mu_0)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

(2) 若 f 下半连续且下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty} I(f,\ \mu_n) \geqslant I(f,\ \mu_0)$$

(3) 若 f 上半连续且上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty} I(f,\ \mu_n) \leqslant I(f,\ \mu_0)$$

证明 在推论 5 中令 $f_n \equiv f_0 = f$ 即可.

推论 7 在 $I(f_0,\ \mu_0)$ 存在的条件下，下列两个条件是等价的：

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

(2) 若 $f_n(x)$ 上半连续收敛到 $\overline{f_0}(x)$ 又下半连续收敛到 $\underline{f_0}(x)$，且 $\mu_0(D_{f_0}) = 0$ $\{f_n(x),\ n\in\mathbf{N}\}$ 等度有界，则有

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n,\ \mu_n) = I(f_0,\ \mu_0)$$

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 由推论 4 显然.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 A 为 μ_0 的任一连续集，令 $f_n \equiv f_0 = I_A$，注意到 $E = A^\circ \cup \partial A \cup \overline{A}^c$ 且 A°、$[\mathrm{cl}A]^c$ 都为开集，则 A° 和 $[\mathrm{cl}A]^c$ 中的点都为 f_0 的连续点，故 $D_{f_0} \subset \partial A$，从而

$$0 \leqslant \mu_0(D_{f_0}) \leqslant \mu_0(\partial A) = 0$$

于是 $f_n(x)$，$f_0(x)$满足推论 7 (2) 的条件，故

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)$$
$$=\lim_{n\to\infty}I(f_n,\ \mu_n)=I(f_0,\ \mu_0)=\mu_0(A)$$

由定理 1.5，有 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$.

推论 8 下列两个条件是等价的:

(1) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;

(2) 若对任意有界函数 f ，且 $\mu_0(D_f)=0$ ，有

$$\lim_{n\to\infty}I(f,\ \mu_n)=I(f,\ \mu_0)$$

证明 在推论 7 中令 $f_n\equiv f_0=f$ 即可.

5 随机规划的稳定性

本章利用上图收敛性理论，分别研究了随机规划期望模型、概率约束规划模型逼近最优解集序列的上半收敛性以及经验逼近模型逼近最优解集序列的几乎处处上半收敛性. 其次，利用集值分析理论证明了随机规划最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

5.1 期望模型逼近最优解集序列的上半收敛性

本节首先讨论了逼近随机规划目标函数序列的连续收敛性，并在随机规划可行集正则的条件下，研究了逼近随机规划可行集序列的收敛性. 然后，利用上图收敛性，给出了随机规划逼近最优解集序列上半收敛的一个充分条件.

5.1.1 引 言

求解带有连续型随机变量的随机规划问题时，除极少数问题外，通常采用某种离散化方法得到一系列（离散）随机变量序列. 而这些随机变量序列分布收敛于初始随机变量，从而将原问题转化为一

系列确定性数学规划问题．这一系列确定性数学规划问题的最优解集序列能否上半收敛于初始随机规划问题的最优解集，取决于初始随机规划问题性质的优良程度．由于随机规划问题几乎都要涉及随机变量函数的期望泛函，而期望泛函序列实际上是多元函数关于弱收敛概率测度序列的积分，如文献 [1，6，8，23] 等．文献 [64] 在多元函数序列等度有界的情形下，研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的下半收敛性．文献 [13] 在多元函数序列等度上有界的情形下，给出了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的上半收敛性．文献 [19] 在多元函数序列无界的情形下，研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理．最近，骆建文等研究了随机规划的逼近解的收敛性，但要求决策变量具有凸性．我们在更一般的情形下，给出随机规划的逼近解集的上半收敛性．

考虑如下的随机规划问题：

$$\min Ef(x,\ \xi(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Eg(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0 \\ x\in D \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}}\in R^N$，$\xi(\omega)$为定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 m 维连续型随机向量，紧集 $D\subset R^N$ 是所有的确定约束集，$f:R^N\times R^m\to R$，$g:R^N\times R^m\to R^d$，E 表示随机变量函数的期望泛函．问题（1）的可行集和最优解集分别记为S_0和M_0．

设$\xi_n(\omega)$为$\xi(\omega)$的离散化随机变量序列，且随机变量序列$\xi_n(\omega)$分布收敛于$\xi(\omega)$，记为$\xi_n(\omega)\xrightarrow{\mathrm{d}}\xi(\omega)$，则问题（1）的逼近问题为

$$\min Ef(x,\ \xi_n(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Eg(x,\ \xi_n(\omega))\leqslant 0 \\ x\in D \end{cases} \tag{2}$$

问题（2）的可行集和最优解集分别记为S_n和M_n．

$\mathscr{B}(R^m)$表示 R^m 中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(R^m)$表示定义在$\mathscr{B}(R^m)$上的概率测度全体，**N** 表示全体自然数组成的集合．设

$\mu_0 = P \circ \xi^{-1}$， $\mu_n = P \circ \xi_n^{-1}$，则 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(R^m)$ 中的概率测度族．于是问题（1）和问题（2）分别转化为与其等价的确定性规划问题（3）和问题（4）:

$$\begin{gathered}\min \int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) \\ \text{s.t.}\begin{cases}\int_{R^m} g(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0 \\ x \in D\end{cases}\end{gathered} \tag{3}$$

和

$$\begin{gathered}\min \int_{R^m} f(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) \\ \text{s.t.}\begin{cases}\int_{R^m} g(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant 0 \\ x \in D\end{cases}\end{gathered} \tag{4}$$

问题（3）和问题（4）的可行集及最优解集分别记为 $\widetilde{S_0}$ 及 $\widetilde{M_0}$ 和 $\widetilde{S_n}$ 及 $\widetilde{M_n}$，则有

$$S_0 = \widetilde{S_0} = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0,\ x \in D\right\}$$

$$S_n = \widetilde{S_n} = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant 0,\ x \in D\right\}$$

确定性约束规划问题（3）和问题（4）又可以分别转化为与其等价的无约束规划问题（5）和问题（6）

$$\min\left[\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{\widetilde{S_0}}(x)\right] \tag{5}$$

和

$$\min\left[\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) + \delta_{\widetilde{S_n}}(x)\right] \tag{6}$$

这里

$$\delta_{\widetilde{S}}(x) = \begin{cases}0, & x \in S \\ +\infty, & x \notin S\end{cases}$$

问题（5）和问题（6）的最优解集分别记为$\widehat{M_0}$和$\widehat{M_n}$，则有

$$M_0=\widetilde{M_0}=\widehat{M_0}\ ,\quad M_n=\widetilde{M_n}=\widehat{M_n}$$

由于随机变量序列$\{\xi_n(\omega)\}$分布收敛于$\xi(\omega)$等价于概率测度族μ_n收敛于μ_0，因此，当随机变量序列$\xi_n(\omega)$分布收敛于$\xi(\omega)$时，研究随机规划（2）的最优解集序列M_n上半收敛于随机规划（1）的最优解集M_0的问题等价转化为当概率测度族μ_n弱收敛于μ_0时，研究无约束确定性规划（6）的最优解集序列$\widehat{M_n}$上半收敛于无约束确定性规划（5）的最优解集$\widehat{M_0}$的问题.

5.1.2　上图收敛

本节中，讨论当概率测度族$\{\mu_n,\ n\in \mathbf{N}\}$弱收敛于$\mu_0$时，问题(4)的目标函数序列的连续收敛性，并在问题（3）的可行集正则的条件下，证明了问题（4）的可行集序列的收敛性，从而给出了与其等价的无约束规划问题（6）目标函数序列的上图收敛性.

定理 5.1　如果对任意的$v_0\in\mathscr{P}(R^m)$，且$v_n\xrightarrow{w}v_0$和对任意的$x_0\in R^N$，且$x_n\to x_0$，那么

（1）若$f(x,u)$在$R^N\times R^m$上下半连续且下有界，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{R^m}f(x_n,\ u)v_n(\mathrm{d}u)\geqslant\int_{R^m}f(x_0,\ u)v_0(\mathrm{d}u)\tag{7}$$

（2）若$f(x,u)$在$R^N\times R^m$上上半连续且上有界，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{R^m}f(x_n,\ u)v_n(\mathrm{d}u)\leqslant\int_{R^m}f(x_0,\ u)v_0(\mathrm{d}u)\tag{8}$$

（3）若$f(x,u)$在$R^N\times R^m$上连续且有界，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^m}f(x_n,\ u)v_n(\mathrm{d}u)=\int_{R^m}f(x_0,\ u)v_0(\mathrm{d}u)\tag{9}$$

证明　（1）若设$x_0\in R^N$，且$x_n\to x_0$，令$g_n(u):=f(x_n,\ u)$，

$g_0(u):=f(x_0, u)$，由于 $f(x, u)$ 在 $R^N\times R^m$ 上下半连续，故对任意的 $u_0\in R^m$，且 $u_n\to u_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty} g_n(u_n)\geqslant g_0(u_0)$$

注意到 $f(x, u)$ 在 $R^N\times R^m$ 上下有界，则函数族 $\{g_0; g_n, n\in\mathbf{N}\}$ 等度下有界. 又 $v_n\xrightarrow{w}v_0$，由第三章的推论 1，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} g_n(u)v_n(\mathrm{d}u)\geqslant\int_{R^m} g_0(u)v_0(\mathrm{d}u)$$

即

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)v_n(\mathrm{d}u)\geqslant\int_{R^m} f(x_0, u)v_0(\mathrm{d}u)$$

（2）设 $x_0\in R^N$，且 $x_n\to x_0$，令 $g_n(u):=f(x_n, u)$，$g_0(u):=f(x_0, u)$，由于 $f(x, u)$ 在 $R^N\times R^m$ 上上半连续，故对任意的 $u_0\in R^m$，且 $u_n\to u_0$，有

$$\limsup_{n\to\infty} g_n(u_n)\leqslant g_0(u_0)$$

注意到 $f(x, u)$ 在 $R^N\times R^m$ 上上有界，则函数族 $\{g_0; g_n, n\in\mathbf{N}\}$ 等度上有界. 又 $v_n\xrightarrow{w}v_0$，由第三章的推论 1，有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{R^m} g_n(u)v_n(\mathrm{d}u)\leqslant\int_{R^m} g_0(u)v_0(\mathrm{d}u)$$

于是

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)v_n(\mathrm{d}u)\leqslant\int_{R^m} f(x_0, u)v_0(\mathrm{d}u)$$

（3）易知满足定理 5.1（3）的条件一定满足定理 5.1 中（1）和（2）的条件，比较（7）式和（8）式，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)v_n(\mathrm{d}u)=\int_{R^m} f(x_0, u)v_0(\mathrm{d}u)$$

推论 1 设 $F_n(x)=\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u)$，$F_0(x)=\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$，那么

(1) 若 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则 $F_n(x)$ 连续收敛于 $F_0(x)$.

(2) 若 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，则对每个固定的 n_0，$F_{n_0}(x)$ 和 $F_0(x)$ 均在 R^N 上连续.

证明 (1) 由 (9) 式令 $v_n = \mu_n$，$v_0 = \mu_0$ 即可.

(2) 在 (9) 式中分别令 $v_n \equiv v_0 = \mu_{n_0}$ 和 $v_n \equiv v_0 = \mu_0$ 即可.

推论 2 设 $G_n^i(x) = \int_{R^m} g_i(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u)$，$G_0^i(x) = \int_{R^m} g_i(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$，那么

(1) 若 $g_i(x, u)$ ($i = 1, 2, \cdots, d$) 在 $R^N \times R^m$ 上下半连续且下有界，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则 $G_n^i(x)$ 下半连续收敛于 $G_0^i(x)$.

(2) 若 $g_i(x, u)$ ($i = 1, 2, \cdots, d$) 在 $R^N \times R^m$ 上下半连续且下有界，则对每个固定的 n_0，$G_n^i(x)$ 和 $G_0^i(x)$ 均在 R^N 上下半连续.

(3) 若 $g_i(x, u)$ ($i = 1, 2, \cdots, d$) 在 $R^N \times R^m$ 上下半连续且有界，对每个固定的 x，$g_i(x, u)$ ($i = 1, 2, \cdots, d$) 关于 u 上半连续，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则 $G_n^i(x)$ 逐点收敛于 $G_0^i(x)$，即对任意的 $x_0 \in R^N$，有

$$\lim_{n\to\infty} G_n^i(x) = G_0^i(x)$$

证明 (1) 在 (7) 式中令 $f(x, u) \equiv g_i(x, u)$，$v_n = \mu_n$，$v_0 = \mu_0$ 即可.

(2) 在 (7) 式中分别令 $f(x, u) \equiv g_i(x, u)$，$v_n \equiv v_0 = \mu_{n_0}$ 和 $v_n \equiv v_0 = \mu_0$ 即可.

(3) 在 (9) 式中令 $f(x, u) \equiv g_i(x_0, u)$，$v_n = \mu_n$，$v_0 = \mu_0$，$x_n = x_0$ 即可.

定义 5.1 如果集合序列 $\{S_n\}$ 满足:

$$\limsup_{n\to\infty} S_n \subset S \subset \liminf_{n\to\infty} S_n$$

其中

$$\limsup_{n\to\infty} S_n := \left\{ x = \lim_{k\to\infty} x_k : x_k \in S_{n_k}, \forall k,\ \{n_k\} \subset \mathbf{N} \right\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} S_n := \left\{x = \lim_{n\to\infty} x_n : x_n \in S_n, \forall n\right\}$$

则称集合序列 $\{S_n\}$ 收敛于 S，记为 $S_n \xrightarrow{K} S_0$.

定义 5.2 如果可行集 $\widetilde{S_0}$ 满足 $\widetilde{S_0} = \mathrm{cl}\widetilde{S_0}^{\circ}$，且 $\widetilde{S_0}^{\circ} \neq \varnothing$，其中

$$\widetilde{S_0}^{\circ} = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g_i(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) < 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d,\ x \in D\right\}$$

则称可行集 $\widetilde{S_0}$ 为正则的.

定理 5.2 设 $g_i(x,\ u)$ （$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d$）在 $R^N \times R^m$ 上下半连续且有界，对每个固定的 x，$g_i(x,\ u)$ 关于 u 上半连续，可行集 $\widetilde{S_0}$ 为正则的，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则

（1）存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，$\widetilde{S_n}$ 为非空紧集；

（2）$\widetilde{S_n} \xrightarrow{K} \widetilde{S_0}$.

证明 （1）由于可行集 $\widetilde{S_0}$ 为正则的，故 $\widetilde{S_0}^{\circ} \neq \varnothing$. 设 $x_0 \in \widetilde{S_0}^{\circ}$，则对 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d$，均有

$$\int_{R^m} g_i(x_0,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) < 0 \quad 且 \quad x_0 \in D$$

令 $\varepsilon = \min\limits_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ d}\{-\int_{R^m} g_i(x_0,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u)\}$，则 $\varepsilon > 0$. 由推论 2 的（3）知，对每个固定的 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d$ 和固定的 x_0，存在 n_i，当 $n \geqslant n_i$ 时，有

$$\int_{R^m} g_i(x_0,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant \int_{R^m} g_i(x_0,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \varepsilon \leqslant 0$$

$n_0 = \max\limits_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ d} n_i$，则当 $n \geqslant n_0$ 时，对 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d$，均有

$$\int_{R^m} g_i(x_0,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant \int_{R^m} g_i(x_0,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \varepsilon \leqslant 0$$

因此，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$x_0 \in \widetilde{S_n}$$

由推论 2 的（2）不难知，$\widetilde{S_n}$ 为闭集. 再注意到 $\widetilde{S_n} \subset D$ 及 D 的紧致

性，故 $\widetilde{S_n}$ 为紧集.

（2）首先证明 $\limsup\limits_{n\to\infty}\widetilde{S_n}\subset\widetilde{S_0}$. 设 $x_0\in\limsup\limits_{n\to\infty}\widetilde{S_n}$，则存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\in\widetilde{S_{n_k}}$，且 $x_{n_k}\to x_0$. 由推论 2 的（1）知，对 $i=1, 2, \cdots, d$，均有

$$\int_{R^m} g_i(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_{R^m} g_i(x_{n_k}, u)\mu_{n_k}(\mathrm{d}u)\leqslant 0$$

注意到 $x_{n_k}\in D$ 及 D 的紧致性，故 $x_0\in D$. 于是

$$x_0\in\widetilde{S_0}$$

其次证明 $\widetilde{S_0}\subset\liminf\limits_{n\to\infty}\widetilde{S_n}$. 设 $x_0\in\widetilde{S_0}$，由 $\widetilde{S_0}=\mathrm{cl}\widetilde{S_0}^{\circ}$ 知，存在 $\{y_n\}\subset\widetilde{S_0}^{\circ}$，使得 $y_n\to x_0$. 由定理 5.2（1）的证明过程不难得到，对每个 y_n，存在 N_n，当 $n\geqslant N_n$ 时，有 $y_n\in\widetilde{S_n}$. 构造下列序列 $\{x_n\}$:

$$x_n=\begin{cases}\text{任意}, & n<N_1\\ y_1, & N_1\leqslant n<\max\{N_1, N_2\}+1\\ y_2, & \max\{N_1, N_2\}+1\leqslant n<\max\{N_1, N_2, N_3\}+2\\ y_3, & \max\{N_1, N_2, N_3\}+2\leqslant n<\max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}+3\\ \vdots\end{cases}$$

由序列 $\{x_n\}$ 的构造可知，对所有的 $n\geqslant N_1$，有

$$x_n\in\widetilde{S_n}$$

另一方面，由 $y_n\to x_0$，则 $x_n\to x_0$，即

$$x_0\in\liminf_{n\to\infty}\widetilde{S_n}$$

于是由定义 5.1 知，$\widetilde{S_n}\xrightarrow{K}\widetilde{S_0}$.

定理 5.3　设 $f(x, u)$ 在 $R^N\times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N\times R^m$ 上下半连续且有界，对每个固定的 x，$g_i(x, u)$ 关于 u 上半连续，可行集 $\widetilde{S_0}$ 为正则的，且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，则有

$$\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x)\right]$$

$$\xrightarrow{\text{epi}}\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x)\right]$$

证明 首先证明对任意的 $x_0 \in R^N$ 且 $x_n \to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x_n)\right]$$

$$\geqslant\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x_0)\right] \tag{10}$$

下面对 $x_0 \in R^N$ 分两种情形考虑：

情形 1：若 $x_0 \in \widetilde{S_0}$，且 $x_n \to x_0$，由推论 1（1），有

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x_n)\right]$$

$$\geqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

$$=\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x_0)\right] \tag{11}$$

情形 2：若 $x_0 \notin \widetilde{S_0}$，且 $x_n \to x_0$，则存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $x_n \notin \widetilde{S_n}$. 否则，存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k} \in \widetilde{S_{n_k}}$. 注意到序列 $\{x_n\}$ 的收敛性，则 $x_{n_k} \to x_0$. 由定理 5.2（2）知，$\widetilde{S_n} \xrightarrow{K} \widetilde{S_0}$，故 $x_0 \in \widetilde{S_0}$，矛盾. 于是

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x_n)\right]=+\infty$$

$$=\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x_0)\right] \tag{12}$$

由（11）式和（12）式知，（10）式成立.

其次证明对任意的 $x_0 \in R^N$，存在某个 $x_n \to x_0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x_n)\right]$$

$$\leqslant\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x_0)\right] \tag{13}$$

下面同样对 $x_0 \in R^N$ 分两种情形考虑：

情形 1：若 $x_0 \in \widetilde{S_0}$，由定理 5.2（2）知，$\widetilde{S_n} \xrightarrow{K} \widetilde{S_0}$，故存在某个 $x_n \to x_0$，使得 $x_n \in \widetilde{S_n}$．由推论 1（1），有

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x_n)\right] \\
&=\limsup_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u) \\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u) \\
&=\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x_0)\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

情形 2：若 $x_0 \notin \widetilde{S_0}$，对任意的 $x_n \to x_0$，显然有

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_n}}(x_n)\right]\leqslant +\infty \\
&=\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{\widetilde{S_0}}(x_0)\right]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

由（14）式和（15）式知，（13）式成立．于是结合（10）式和（13）式及定义 3.4 可知本定理成立．

5.1.3 最优解集序列的上半收敛性

为了讨论期望模型逼近最优解集序列的收敛性，我们引入集合序列上半收敛的概念．设 R^N 为 N 维欧氏空间，$x_0 \in R^N$ 到 $C \subset R^N$ 的距离函数定义为

$$
d(x, C)=\begin{cases}\inf\{\|x-y\| : y\in C\}, & \text{当}C\neq\varnothing\text{时}\\ +\infty, & \text{当}C=\varnothing\text{时}\end{cases}
$$

集合 $A \subset R^N$ 到集合 $B \subset R^N$ 的上半距离定义为

$$
e(A, B)=\sup_{y\in A} d(y, B)
$$

定义 5.3 如果集合序列 $\{S_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} e(S_n, S_0) = 0$$

则称集合序列$\{S_n\}$上半收敛于S_0.

定理 5.4 设$f(x, u)$在$R^N \times R^m$上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在$R^N \times R^m$上下半连续且有界，对每个固定的x，$g_i(x, u)$关于u上半连续，可行集$\widetilde{S_0}$为正则的，且$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则问题（6）的最优解集序列$\{\widehat{M_n}\}$上半收敛于问题（5）的最优解集$\widehat{M_0}$.

证明 注意到可行集$\widetilde{S_0}$的正则性，由推论 1（2）及定理 5.2（1）知，存在n_0，当$n \geqslant n_0$时，$\widehat{M_n} = \widetilde{M_n} \neq \varnothing$且$\widehat{M_0} = \widetilde{M_0} \neq \varnothing$.

为了证明$\lim\limits_{n\to\infty} e(\widehat{M_n}, \widehat{M_0}) = 0$，即需证明：对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N_0$，当$n \geqslant N_0$时，有

$$e(\widehat{M_n}, \widehat{M_0}) < \varepsilon$$

也即需证明：对任意的$\varepsilon > 0$，存在N_0，当$n \geqslant N_0$时，有

$$\widehat{M_n} \subset \widehat{M_0} + B_\varepsilon(0)$$

这里$B_\varepsilon(0) = \{x \in R^N : \|x\| < \varepsilon\}$.

下面我们证明：对任意包含$\widehat{M_0}$的开集V，存在N_0，当$n \geqslant N_0$时，有

$$\widehat{M_n} \subset V$$

反设此结论不成立，即存在n_k，使得$x_{n_k} \in \widehat{M_{n_k}}$，但$x_{n_k} \notin V$. 注意到$\widehat{M_{n_k}} \subset D$及$D$的紧致性，则$\{x_{n_k}\}$必存在聚点$x_0$. 又由于$V$为开集，故$x_0 \notin V$. 另一方面，由定理 5.3 及文献[8] 命题 3.3 知，$x_0 \in \widehat{M_0}$，这与$\widehat{M_0} \subset V$矛盾. 特别地，取$V = \widehat{M_0} + B_\varepsilon(0)$. 证毕.

推论 3 设$f(x, u)$在$R^N \times R^m$上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在$R^N \times R^m$上下半连续且有界，对每个固定的x，$g_i(x, u)$关于u上半连续，且满足：

（1）$S_0 = \mathrm{cl}(S_0^\circ)$且$S_0^\circ \neq \varnothing$. 其中

$$S_0^\circ=\left\{x\in R^N:\int_{R^m}g(x,u)\mu_0(\mathrm{d}u)<0,x\in D\right\}$$

（2） $\xi_n(\omega)\xrightarrow{d}\xi_0(\omega)$，

则问题(2)的最优解集序列 M_n 上半收敛于问题(1)的最优解集 M_0.

证明　易知 $S_0=\widetilde{S_0}$，$S_0^\circ=\widetilde{S_0}^\circ$，故推论 3 的条件(1) 等价于 $\widetilde{S_0}^\circ$ 的正则性. 又 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{d}\xi_0(\omega)$ 等价于 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，注意到 $M_0=\widehat{M_0}$，$M_n=\widehat{M_n}$，由定理 5.4 知推论 3 成立.

5.2　概率约束规划模型逼近最优解集序列的上半收敛性

本节针对随机规划期望模型的特殊情形概率约束规划模型，研究了更一般的概率约束规划问题的稳定性. 在一定条件下，得到了概率约束规划逼近最优解集序列的上半收敛性.

5.2.1　引　言

考虑下列随机规划问题

$$\begin{aligned}&\min Ef(x,\xi(\omega))\\&\text{s.t.}\begin{cases}P[g_i(x,\xi(\omega))\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,d\ ]\geqslant\alpha\\x\in D\end{cases}\end{aligned}\tag{16}$$

其中，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^{\mathrm{T}}\in R^N$，$\xi(\omega)$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 m 维连续型随机向量，紧集 $D\subset R^N$ 是所有的确定约束集，$f:R^N\times R^m\to R$，$g:R^N\times R^m\to R^d$，E 表示随机变量函数的期望泛函. 问题（16）的可行集和最优解集分别记为 S_0和 M_0.

设 $\{\xi_n(\omega)\}$ 为 $\xi(\omega)$ 的离散化随机变量序列，且随机变量序列

$\{\xi_n(\omega)\}$ 分布收敛于 $\xi(\omega)$，记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则问题（16）的逼近问题为

$$\min Ef(x, \xi_n(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} P[g_i(x, \xi_n(\omega)) \leqslant 0, \ i=1, 2, \cdots, d\ ] \geqslant \alpha \\ x \in D \end{cases} \tag{17}$$

问题（17）的可行集和最优解集分别记为 S_n 和 M_n.

$\mathscr{B}(R^m)$ 表示 R^m 中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(R^m)$ 表示定义在 $\mathscr{B}(R^m)$ 上的概率测度全体，**N** 表示全体自然数组成的集合. 设 $\mu_0 = P \circ \xi^{-1}$，$\mu_n = P \circ \xi_n^{-1}$，则 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(R^m)$ 中的概率测度族. 记

$$H(x) := \{u \in R^m : g_i(x, u) \leqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, d\}$$

则

$$P[g_i(x, \xi(\omega)) \leqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, d] = P\{\xi(\omega) \in H(x)\} = \mu_0(H(x))$$

$$P[g_i(x, \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, d] = P\{\xi_n(\omega) \in H(x)\} = \mu_n(H(x))$$

于是问题（16）和问题（17）分别转化为与其等价的确定性规划问题（18）和问题（19）

$$\min \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \mu_0(H(x)) \geqslant \alpha \\ x \in D \end{cases} \tag{18}$$

和

$$\min \int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \mu_n(H(x)) \geqslant \alpha \\ x \in D \end{cases} \tag{19}$$

问题（18）和问题（19）的目标函数、可行集及最优解集分别记为

$Q(x,\mu_0)$、$S(\mu_0)$及$M(\mu_0)$和$Q(x,\mu_n)$、$S(\mu_n)$及$M(\mu_n)$，即

$$Q(x,\ \mu_0)=\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

$$Q(x,\ \mu_n)=\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u)$$

$$S(\mu_0)=\left\{x\in D\subset R^N : \mu_0(H(x))-\alpha\geqslant 0\right\}$$

$$S(\mu_n)=\left\{x\in D\subset R^N : \mu_n(H(x))-\alpha\geqslant 0\right\}$$

$$M(\mu_0)=\left\{x\in S(\mu_0): Q(x,\ \mu_0)=\min Q(x,\ \mu_0)\right\}$$

$$M(\mu_n)=\left\{x\in S(\mu_n): Q(x,\ \mu_n)=\min Q(x,\ \mu_n)\right\}$$

确定性约束规划问题（18）和问题（19）又可以分别转化为与其等价的下列无约束规划问题

$$\min[Q(x,\ \mu_0)+\delta_{S(\mu_0)}(x)] \tag{20}$$

和

$$\min[Q(x,\mu_n)+\delta_{S(\mu_n)}(x)] \tag{21}$$

这里

$$\delta_S(x)=\begin{cases}0, & x\in S\\ +\infty, & x\notin S\end{cases}$$

问题（20）和问题（21）的最优解集分别记为$\widehat{M}(\mu_0)$ 和$\widehat{M}(\mu_n)$，则有

$$M_0=M(\mu_0)=\widehat{M}(\mu_0)\ ,\quad M_n=M(\mu_n)=\widehat{M}(\mu_n)$$

由于随机变量序列$\xi_n(\omega)$分布收敛于$\xi(\omega)$等价于概率测度族μ_n弱收敛于μ_0，因此，当随机变量序列$\xi_n(\omega)$分布收敛于$\xi(\omega)$时，研究随机规划（17）的最优解集序列M_n上半收敛于随机规划（16）的最优解集M_0的问题等价转化为当概率测度族μ_n弱收敛于μ_0时，研究无约束确定性规划（21）的最优解集序列$\widehat{M}(\mu_n)$上半收敛于无约束确定性规划（20）的最优解集$\widehat{M}(\mu_0)$的问题.

5.2.2 上图收敛

定理 5.5 （1）若 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则对任意的 $x_0 \in R^N$，且 $x_n \to x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty} Q(x_n, \mu_n) = Q(x_0, \mu_0)$$

（2）若 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，则对每个固定的 n_0，$Q(x, \mu_{n_0})$ 和 $Q(x, \mu_0)$ 均在 R^N 上连续.

证明 （1）在定理 5.1（3）中令 $v_n = \mu_n$，$v_0 = \mu_0$ 即可.

（2）在定理 5.1（3）中分别令 $v_n \equiv v_0 = \mu_{n_0}$ 和 $v_n \equiv v_0 = \mu_0$ 即可.

定理 5.6 如果对任意的 $v_0 \in \mathscr{P}(R^m)$，且 $v_n \xrightarrow{w} v_0$ 和对任意的 $x_0 \in R^N$，且 $x_n \to x_0$，那么

（1）设 $g_i(x, u)$（$i = 1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上下半连续，则

$$\limsup_{n\to\infty} v_n(H(x_n)) \leqslant v_0(H(x_0)) \tag{22}$$

（2）设 $g_i(x, u)$（$i = 1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上上半连续，则

$$\liminf_{n\to\infty} v_n(H(x_n)) \geqslant v_0(M(x_0)) \tag{23}$$

其中，$M(x) := \left\{u \in R^m : g_i(x, u) < 0,\ i = 1, 2, \cdots, d\right\}$.

（3）设 $g_i(x, u)$（$i = 1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上连续，且对每个固定的 $x \in R^N$，$v_0(E(x)) = 0$，这里 $E(x) := H(x) \setminus M(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty} v_n(H(x_n)) = v_0(H(x_0))$$

证明 （1）若 $x_0 \in R^N$ 且 $x_n \to x_0$，设 $u_0 \in \limsup\limits_{n\to\infty} H(x_n)$，其中

$$\limsup_{n\to\infty} H(x_n) = \left\{u \in R^m : u = \lim_{k\to\infty} u_{n_k} : u_{n_k} \in H(u_{n_k}), \forall k \in \mathbf{N}\right\}$$

则存在 $u_{n_k} \to u_0$，使得 $u_{n_k} \in H(u_{n_k})$，即对每个 i（$i = 1, 2, \cdots, d$）均有

$$g_i(x_{n_k},\ u_{n_k})\leqslant 0$$

由 $g_i(x, u)$ ($i=1, 2, \cdots, d$)的下半连续性，则对每个 i ($i=1, 2, \cdots, d$) 均有

$$g_i(x_0,\ u_0)\leqslant 0$$

即 $u_0\in H(x_0)$. 故

$$\limsup_{n\to\infty} H(x_n)\subset H(x_0)$$

对任意的 $v_0\in\mathscr{P}(R^m)$ ，且 $v_n\xrightarrow{w}v_0$ 和对任意的 $x_0\in R^N$ ，且 $x_n\to x_0$ ，由定理 1.1，有

$$\limsup_{n\to\infty} v_n(H(x_n))\leqslant v_0(H(x_0))$$

（2） 若 $x_0\in R^N$ 且 $x_n\to x_0$ ，设 $u_0\in\limsup_{n\to\infty}[H(x_n)]^c$ ，则存在 $u_{n_k}\to u_0$ ，使得 $u_{n_k}\in[H(u_{n_k})]^c$ ，即

$$u_{n_k}\in\bigcup_{i=1}^{d}\left\{u\in R^m: g_i(x_{n_k},\ u)>0\right\}$$

由于 d 有限，故存在某个 $i_0\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ d\}$ ，使得数列 $\{(x_{n_k},\ u_{n_k})\}$ 中有无限多项. 不妨设其为本身，且满足 $g_{i_0}(x_{n_k},u_{n_k})>0$ ，由 $g_{i_0}(x, u)$ 的上半连续性，有

$$g_{i_0}(x_0,\ u_0)>0$$

因此 $u_0\notin M(x_0)$ ，即 $u_0\in[M(x_0)]^c$. 故

$$\limsup_{n\to\infty}[H(x_n)]^c\leqslant[M(x_0)]^c$$

对任意的 $v_0\in\mathscr{P}(R^m)$ ，且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$ 和对任意的 $x_0\in R^N$ ，且 $x_n\to x_0$ ，由定理 1.1，有

$$\liminf_{n\to\infty} v_n(H(x_n))\geqslant v_0(M(x_0))$$

（3）易知满足定理 5.6（3）的条件的前半部分一定满足定理 5.6（1）和（2）的条件，又由于对任意的 $x_0 \in R^N$，有 $v_0(E(x_0))=0$，由（22）式和（23）式，有

$$\liminf_{n\to\infty} v_n(H(x_n)) \geqslant v_0(M(x_0)) = v_0(E(x_0)) + v_0(M(x_0))$$
$$= v_0(H(x_0)) \geqslant \limsup_{n\to\infty} v_n(H(x_n))$$

故

$$\lim_{n\to\infty} v_n(H(x_n)) = v_0(H(x_0))$$

推论 4 设 $g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上下半连续，则对每个固定的 n_0，$\mu_0(H(x))$ 在 R^N 上上半连续.

证明 在（22）式中令 $v_n \equiv v_0 = \mu_{n_0}$ 即可.

定义 5.4 称可行集 $S(\mu_0)$ 为正则的，如果 $S(\mu_0)=\mathrm{cl}[S(\mu_0)]^{\circ}$ 且 $S(\mu_0) \neq \varnothing$，其中

$$S(\mu_0)^{\circ} = \left\{x \in D \subset R^N : \mu_0(H(x)) - \alpha > 0\right\}$$

定理 5.7 设 $g_i(x,u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$\mu_0(E(x))=0$；

（3）可行集 $S(\mu_0)$ 为正则的，

则（1）当 $n \geqslant N_0$ 时，$S(\mu_n)$ 为非空紧集；

（2）$S(\mu_n) \xrightarrow{K} S(\mu_0)$.

证明 （1）由 $S(\mu_0)$ 的正则性，则 $S(\mu_0) \neq \varnothing$. 不妨设 $x_0 \in S(\mu_0)^{\circ}$，则 $x_0 \in D$ 且 $\mu_0(H(x_0)) - \alpha > 0$. 令 $\delta = \mu_0(H(x_0)) - \alpha > 0$，则 $\delta > 0$. 又对每个固定的 $x_0 \in R^N$，有 $v_0(E(x_0))=0$，由定理 5.6（3）知，对给定 ε，使得 $0<\varepsilon<\delta$，存在 N_0，当 $n \geqslant N_0$ 时，有

$$\mu_n(H(x_0))-\alpha \geqslant \mu_0(H(x_0))-\alpha-\varepsilon \geqslant 0$$

于是当 $n \geqslant N_0$ 时，有

$$x_0 \in S(\mu_n)$$

由推论 4 不难知道，$S(\mu_n)$ 为闭集. 注意到 D 的紧致性且 $S(\mu_n) \subset D$，故 $S(\mu_n)$ 为非空紧集.

（2）首先证明 $\limsup\limits_{n\to\infty} S(\mu_n) \subset S(\mu_0)$. 设 $x_0 \in \limsup\limits_{n\to\infty} S(\mu_n)$，则存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k} \in S(\mu_{n_k})$，且 $x_{n_k} \to x_0$. 又 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，由定理 5.6（1），有

$$0 \leqslant \limsup_{k\to\infty} \mu_{n_k}(H(x_{n_k}))-\alpha \leqslant \mu_0(H(x_0))-\alpha$$

注意到 $x_{n_k} \in D$ 及 D 的紧致性，故 $x_0 \in D$，于是

$$x_0 \in S(\mu_0)$$

其次证明 $S(\mu_0) \subset \liminf\limits_{n\to\infty} S(\mu_n)$. 设 $x_0 \in S(\mu_0)$，由 $S(\mu_0) = \mathrm{cl}[S(\mu_0)^{*}]$ 可知，存在 $\{y_n\} \subset S(\mu_0)^{*}$，使得 $y_n \to x_0$. 由定理 5.7（1）的证明过程不难得到，对每个 y_n，存在 N_n，当 $n \geqslant N_n$ 时，有

$$y_n \in S(\mu_n)$$

构造下列序列 $\{x_n\}$:

$$x_n = \begin{cases} \text{任意}, & n < N_1 \\ y_1, & N_1 \leqslant n < \max\{N_1, N_2\}+1 \\ y_2, & \max\{N_1, N_2\}+1 \leqslant n < \max\{N_1, N_2, N_3\}+2 \\ y_3, & \max\{N_1, N_2, N_3\}+2 \leqslant n < \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}+3 \\ \vdots \end{cases}$$

由序列 $\{x_n\}$ 的构造，则对所有的 $n \geqslant N_1$，有

$$x_n \in S(\mu_n)$$

另一方面，由 $y_n \to x_0$，则 $x_n \to x_0$，即

$$x_0 \in \liminf_{n\to\infty} S(\mu_0)$$

于是由定义 5.1 可知，$S(\mu_n) \xrightarrow{K} S(\mu_0)$.

定理 5.8 设 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$\mu_0(E(x))=0$；

（3）可行集 $S(\mu_0)$ 为正则的，

则

$$[Q(x, \mu_n)+\delta_{S(\mu_n)}(x)] \xrightarrow{\text{epi}} [Q(x, \mu_0)+\delta_{S(\mu_0)}(x)]$$

证明 完全类似于定理 5.3 的证明.

5.2.3 最优解集序列的上半收敛性

定理 5.9 设 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$\mu_0(E(x))=0$；

（3）可行集 $S(\mu_0)$ 为正则的，

则

$$\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M}(\mu_n), \widehat{M}(\mu_0))=0$$

证明 完全类似于定理 5.4 的证明.

推论 5 设 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$P(E(x))=0$；

（3）$S_0 = \text{cl}[S_0^\circ]$ 且 $S_0 \neq \varnothing$，

这里

$$S_0^* = \left\{x \in D \subset R^N : P[g_i(x, \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, d\ ] > \alpha\right\}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} e(M_n, M_0) = 0$$

证明 易知 $S_0 = S(\mu_0)$，$S_0^* = S(\mu_0)^*$，则推论 5 的条件（3）等价于 $S(\mu_0)$ 的正则性. 又 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$ 等价于 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，且对每个固定的 $x \in R^N$，$P(E(x)) = 0$ 等价于 $\mu_0(E(x)) = 0$. 再注意到 $M_0 = \widehat{M}(\mu_0)$，$M_n = \widehat{M}(\mu_n)$，由定理 5.8 知推论 5 成立.

5.3 经验逼近模型的最优解集序列的几乎处处上半收敛性

本节在随机变量介入约束函数的情形下，讨论了随机规划目标函数经验逼近序列的几乎处处连续收敛性. 在随机规划可行集正则条件下，研究了随机规划经验逼近可行集序列的几乎处处收敛性，并依据上图收敛性概念，给出了随机规划经验逼近最优解集序列的几乎处处上半收敛性.

5.3.1 引 言

上图收敛性在随机规划统计估计分析中有关相合性和稳健性等方面起着非常重要的作用，一些作者利用上图收敛性从不同侧面研究了随机规划的统计估计问题，如相合性、稳健性、极大似然估计的强相合性、极限函数的最优解集的充分闭性等. 但这些文献均是针对随机变量介入目标函数情形的，最近，Zervos M 给出了多元函数关于经验概率测度序列积分的上图收敛性.

本节考虑了随机变量介入约束函数的更为一般的情形，并依据

上图收敛性概念，受文献 [11] 研究结果的启发，给出了随机规划经验逼近最优解集序列的几乎处处上半收敛性.

考虑如下的随机规划问题

$$\min Ef(x, \xi(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Eg(x, \xi(\omega)) \leqslant 0 \\ x \in D \end{cases} \tag{24}$$

其中，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}} \in R^N$，$\xi(\omega)$为定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的$m$维连续型随机向量，紧集$D \subset R^N$是所有的确定约束集，$f: R^N \times R^m \to R$，$g: R^N \times R^m \to R^d$，$E$表示随机变量函数的期望泛函.

$\mathscr{B}(R^m)$表示R^m中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(R^m)$表示定义在$\mathscr{B}(R^m)$上的概率测度全体，**N** 表示全体自然数组成的集合. 设$\mu_0 = P \circ \xi^{-1}$，则μ_0为$\mathscr{P}(R^m)$中的概率测度，于是问题（24）可改写为

$$\min \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \int_{R^m} g(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0 \\ x \in D \end{cases} \tag{25}$$

问题（25）的可行集和最优解集分别记为S_0和M_0，即

$$S_0 = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0, x \in D\right\}$$

$$M_0 = \left\{x \in S_0 : \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant \min_{x \in S_0} \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u), x \in D\right\}$$

在许多实际问题中，概率测度μ_0是未知的，只有n个样本点$(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega))$是已知的. 而$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega)$是随机独立取得的样本，因此可以认为随机变量$\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega)$是独立且与$\xi(\omega)$有相同的分布. 对每一个固定的$\omega \in \Omega$，观测值

$(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega))$ 可以确定一个经验概率测度

$$\mu_n(\omega, A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_A(\xi_i(\omega)), \quad \forall A \in B(E)$$

即 $\forall \omega \in \Omega$，有

$$\mu_n(\omega, \cdot) \in P(R^m)$$

用经验概率测度 $\mu_n(\omega,\cdot)$ 替代问题（25）中的 $\mu_0(\cdot)$，这样可得到问题（25）的经验逼近模型

$$\min \int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} \int_{R^m} g(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) \leqslant 0 \\ x \in D \end{cases} \tag{26}$$

问题（26）的可行集和最优解集分别记为 $S_n(\omega)$ 和 $M_n(\omega)$，即

$$S_n(\omega) = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) \leqslant 0, x \in D\right\}$$
$$M_n(\omega) = \left\{x \in S_0(\omega) : \int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) \leqslant \min_{x \in S_0(\omega)} \int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u), x \in D\right\}$$

问题（25）和问题（26）又可以分别等价地转化为下列无约束规划问题：

$$\min\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(x)\right] \tag{27}$$
$$\min\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) + \delta_{S_n(\omega)}(x)\right] \tag{28}$$

这里

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S \\ +\infty, & x \notin S \end{cases}$$

问题（27）和问题（28）的最优解集分别记为 $\widehat{M}_0$ 和 $\widehat{M}_n(\omega)$，则有

$$M_0=\widehat{M}_0,\quad M_n(\omega)=\widehat{M}_n(\omega)$$

因此，当n不断地增大时，研究随机规划(26)的最优解集序列$M_n(\omega)$几乎处处上半收敛于随机规划（25）的最优解集M_0的问题等价转化为研究无约束规划（28）的最优解集序列$\widehat{M}_n(\omega)$几乎处处上半收敛于无约束规划（27）的最优解集$\widehat{M}_0$的问题.

5.3.2 几乎处处上图收敛

首先给出问题（26）的目标函数序列的几乎处处连续收敛性，并在问题（25）的可行集正则条件下，研究了问题（26）的可行集序列的几乎处处收敛性，由此得到了无约束规划（28）的目标函数序列的几乎处处上图收敛性.

对于随机函数序列$f_n:R^N\times\Omega\to\overline{R}$和函数$f_0:R^N\to\overline{R}$，我们引入下列概念：

定义 5.5 设$\{f_0;f_n,n\in\mathbf{N}\}$是随机函数族，如果存在零测集$N_0\subset\Omega$，使得对任意固定的$\omega\in\Omega\setminus N_0$和对任意的$x_0\in R^N$，满足：

（1）$x_n\to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n,\ \omega)\geqslant f_0(x_0)$$

（2）存在某个$x_n\to x_0$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n,\ \omega)\leqslant f_0(x_0)$$

则称随机函数序列$\{f_n\}$几乎处处上图收敛于f_0，记为$f_n\xrightarrow{\text{epi}}f_0$, a.s.

定义 5.6 设$\{f_0;f_n,\ n\in\mathbf{N}\}$是随机函数族，如果存在零测集$N_0\subset\Omega$，使得对任意固定的$\omega\in\Omega\setminus N_0$和对任意的$x_0\in R^N$，且$x_n\to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n,\ \omega)\geqslant f_0(x_0)$$

则称随机函数序列$\{f_n\}$几乎处处下半连续收敛于f_0；如果$\{-f_n\}$几

乎处处下半连续收敛于 $-f_0$，则称随机函数序列 $\{f_n\}$ 几乎处处上半连续收敛于 f_0；如果 $\{f_n\}$ 几乎处处既下半连续收敛又上半连续收敛于 f_0，则称随机函数序列 $\{f_n\}$ 几乎处处连续收敛于 f_0.

定理 5.10　若 $f(x, u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 下半连续，且存在关于 μ_0 可积的函数 $\beta(u)$，使得

$$f(x, u) \geqslant \beta(u)$$

则　(1) 函数 $\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$ 在 R^N 上下半连续；

(2) 给定 n，随机函数 $\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)$ 对任意固定的 $\omega\in\Omega$ 关于 x 下半连续；

(3) 对任意的 $x_0\in R^N$，且 $x_n\to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) \geqslant \int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\text{, a. s}$$

证明　(1) 由于函数 $\beta(u)$ 关于 μ_0 可积，$f(x, u)$ 对任意固定的 u 关于 x 下半连续，且 $f(x, u)\geqslant \beta(u)$，应用 Fatou 引理，对任意的 $x_0\in R^N$，且 $x_n\to x_0$，有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) &\geqslant \int_{R^m}\liminf_{n\to\infty} f(x_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\\ &\geqslant \int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\end{aligned}$$

故函数 $\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$ 在 R^N 上下半连续.

(2) 取定 n，对每个固定的 $\omega\in\Omega$，有

$$\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x, \xi_i(\omega))$$

由于 $f(x, u)$ 对任意固定的 u 关于 x 下半连续，故随机函数 $\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)$ 对任意固定的 $\omega\in\Omega$ 关于 x 下半连续.

(3) 由于 $f(x, u)$ 对任意固定的 u 关于 x 下半连续，且 $f(x, u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，于是 $f(x, u)$ 满足文献[23]定理 2.3 的假设

条件 2.1.又由于 $f(x, u)\geqslant\beta(u)$，因此 $f(x, u)$ 满足文献[23]定理 2.3 的假设条件 2.2. 由文献[23]定理 2.3，有

$$\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)\xrightarrow{\text{epi}}\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\text{ , a. s}$$

因而存在零测集 $N_1\subset\Omega$，使得对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N_1$ 和对任意的 $x_0\in R^N$，且 $x_n\to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)\geqslant\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

推论 6 若 $f(x, u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 连续，且存在关于 μ_0 可积的函数 $\beta(u)$，使得

$$|f(x, u)|\leqslant\beta(u)$$

则 （1）函数 $\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$ 在 R^N 上连续；

（2）给定 n，随机函数 $\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)$ 对任意固定的 $\omega\in\Omega$ 关于 x 连续；

（3）对任意的 $x_0\in R^N$，且 $x_n\to x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\text{ , a. s}$$

证明 注意到函数上下半连续的定义，由定理 5.10 易知推论 6 成立.

定义 5.7 设 $\{S_n(\omega); n\in\mathbf{N}\}$ 是随机集合序列，如果存在零测集 $N_0\subset\Omega$，使得对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N_0$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(\omega)\subset S\subset\liminf_{n\to\infty} S_n(\omega),\qquad\text{a.s}$$

其中

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(\omega)=\left\{x\in R^N: x=\lim_{k\to\infty} x_{n_k},\ x_{n_k}\in S_{n_k}(\omega),\forall k\in\mathbf{N}\right\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(\omega)=\left\{x\in R^N: x=\lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n\in S_n(\omega),\forall n\geqslant n_0\right\}$$

则称随机集合序列 $\{S_n(\omega); n\in\mathbf{N}\}$ 几乎处处收敛于 S，记为

$S_n(\omega)\xrightarrow{K}S$. a. s.

定义 5.8 如果可行集 S_0 满足 $S_0=\mathrm{cl}[S_0^{\bullet}]$，且 $S_0^{\bullet}\neq\varnothing$，其中

$$S_0^{\bullet}=\left\{x\in R^N:\int_{R^m}g_i(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u)<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d,\ x\in D\right\}$$

则称可行集 S_0 为正则的.

定理 5.11 如果 $g_i(x,\ u)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ d$）关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 下半连续，存在关于 μ_0 可积的函数 $\gamma(u)$，使得对 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ d$，均有 $g_i(x,\ u)\geqslant\gamma(u)$，且 S_0 为正则的，则 $S_n(\omega)\xrightarrow{K}S$ a. s.

证明 由定理 5.10（3）知，对每个固定的 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ d$，存在零测集 $N_i\subset\Omega$，使得对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N_i$，函数序列 $\left\{\int_{R^m}g_i(x,\ u)\mu_n(\omega,\ \mathrm{d}u)\right\}$ 下半连续收敛于 $\int_{R^m}g_i(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u)$. 令 $N=\bigcup_{i=1}^{d}N_i$，则 N 为零测集. 对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N$，设 $x_0\in\limsup_{n\to\infty}S_n(\omega)$，则存在 $x_{n_k}\in S_{n_k}(\omega)$，使得 $x_{n_k}\to x_0$，且 $x_{n_k}\in D$. 由函数序列 $\left\{\int_{R^m}g_i(x,\ u)\mu_n(\omega,\ \mathrm{d}u)\right\}$ 的下半连续收敛性，对每个固定的 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ d$，有

$$0\geqslant\liminf_{k\to\infty}\int_{R^m}g_i(x_{n_k},\ u)\mu_{n_k}(\omega,\ \mathrm{d}u)\geqslant\int_{R^m}g_i(x_0,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u)\qquad(29)$$

再注意到 D 的紧致性，故 $x_0\in D$，因此

$$x_0\in S_0$$

即

$$\limsup_{n\to\infty}S_n(\omega)\subset S.\quad \text{a. s}$$

另一方面，对任意的 $x_0\in S_0$，由 S_0 的正则性可知，存在 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\in S_0^{\bullet}$，且 $x_n\to x_0$. 对每个固定的 x_n 和对每个固定的 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ d$，均有

$$\left|\int_{R^m} g_i(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\right| < +\infty$$

由大数定律可知，存在零测集 $N_i \subset \Omega$，使得对任意固定的 $\omega \in \Omega \setminus N_i$，均有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_k(\omega, \mathrm{d}u) = \int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

令 $\varepsilon_n = \min\limits_{i=1,2,\cdots,d}\left\{-\int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\right\}$，$N = \bigcup\limits_{i=1}^{d} N_i$，则 $\varepsilon > 0$，且 N 为零测集. 取 γ_n，使得 $\varepsilon_n > \gamma_n > 0$，于是对任意固定的 $\omega \in \Omega \setminus N$ 和对每个固定的 i 及 γ_n，存在 $N_{n,i}(\omega)$，当 $k \geqslant N_{n,i}(\omega)$ 时，有

$$\int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_k(\mathrm{d}u) \leqslant \int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \gamma_n \leqslant 0 \qquad (30)$$

令 $N_n(\omega) = \max\limits_{i=1,2,\cdots,d} N_{n,i}(\omega)$，当 $k \geqslant N_n(\omega)$ 时，有

$$\int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_k(\mathrm{d}u) \leqslant \int_{R^m} g_i(x_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \gamma_n \leqslant 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, d\}$$

再注意到 $x_n \in D$，于是当 $k \geqslant N_n(\omega)$ 时，有

$$x_n \in S_k(\omega)$$

构造下列序列 $\{y_n\}$：

$$y_n = \begin{cases} \text{任意}, & n < N_1(\omega) \\ x_1, & N_1(\omega) \leqslant n < \max\{N_1(\omega), N_2(\omega)\} + 1 \\ x_2, & \max\{N_1(\omega), N_2(\omega)\} + 1 \leqslant n < \max\{N_1(\omega), N_2(\omega), N_3(\omega)\} + 2 \\ x_3, & \max\{N_1(\omega), N_2(\omega), N_3(\omega)\} + 2 \leqslant n < \\ & \max\{N_1(\omega), N_2(\omega), N_3(\omega), N_4(\omega)\} + 3 \\ \vdots \end{cases}$$

由序列 $\{y_n\}$ 的构造，对所有的 $n \geqslant N_1(\omega)$，有

$$y_n \in S_n(\omega)$$

另一方面，由 $x_n \to x_0$，则 $y_n \to x_0$，因此

$$x_0 \in \liminf_{n\to\infty} S_n(\omega). \quad \text{a. s}$$

故由（29）式和由（30）式及定义 5.7 可知，$S_n(\omega) \xrightarrow{K} S$ a. s.

定理 5.12　如果满足下列两个条件：

（1）$f(x, u)$关于$\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$可测，对任意固定的$u$关于$x$连续，且存在关于$\mu_0$可积的函数$\beta(u)$，使得

$$\left|f(x, u)\right|\leqslant\beta(u)$$

（2）$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）关于$\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$可测，对任意固定的$u$关于$x$下半连续，存在关于$\mu_0$可积的函数$\gamma(u)$，使得对$i=1, 2, \cdots, d$，均有$g_i(x, u)\geqslant\gamma(u)$，且$S_0$为正则的，
则

$$\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x)\right]$$
$$\xrightarrow{\text{epi}}\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x)\right].\quad \text{a.s}$$

证明　由题设条件（1）及推论 6（3）知，存在零测集$N_1\subset\Omega$，使得对任意固定的$\omega\in\Omega\setminus N_1$，有

$$\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)\xrightarrow{u}\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\tag{31}$$

由题设条件（2）及定理 5.11 可知，存在零测集$N_2\subset\Omega$，使得对任意固定的$\omega\in\Omega\setminus N_2$，有

$$S_n(\omega)\xrightarrow{K}S\tag{32}$$

令$N=\bigcup_{i=1}^{2}N_i$，则N为零测集.

首先证明对任意固定的$\omega\in\Omega\setminus N$和对任意的$x_0\in R^N$，且$x_n\to x_0$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x_n)\right]$$
$$\geqslant\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x_0)\right]\tag{33}$$

对任意固定的$\omega\in\Omega\setminus N$，下面对$x_0\in R^N$分两种情形考虑：

情形 1：若$x_0\in S_0$，且$x_n\to x_0$，由（31）式，有

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x_n)\right] \\
&\geqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) \\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u) \\
&=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x_0)
\end{aligned} \tag{34}$$

情形2：若$x_0 \notin S_0$，且$x_n \to x_0$，则存在$n_0(\omega)$，当$n \geqslant n_0(\omega)$时，有$x_n \notin S_n(\omega)$. 否则，存在$\{n_k(\omega)\}$，使得$x_{n_k} \in S_{n_k}(\omega)$. 注意到序列$\{x_n\}$的收敛性，则$x_{n_k} \to x_0$. 由（32）式知，$S_n(\omega)\xrightarrow{K} S$，故$x_0 \in S_0$. 矛盾. 于是

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x_n)\right]=+\infty \\
&=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x_0)
\end{aligned} \tag{35}$$

由（34）式和（35）式知，（33）式成立.

其次证明对任意固定的$\omega \in \Omega \setminus N$和对任意的$x_0 \in R^N$，存在某个$x_n \to x_0$，使得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x_n)\right] \\
&\leqslant\left[\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x_0)\right]
\end{aligned} \tag{36}$$

对任意固定的$\omega \in \Omega \setminus N$，下面同样对$x_0 \in R^N$分两种情形考虑：

情形 1：若$x_0 \in S_0$，由（32）式，有$S_n(\omega)\xrightarrow{K} S$，故存在某个$x_n \to x_0$，使得$x_n \in S_n(\omega)$. 由（31）式，有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x_n)\right] \\
&=\limsup_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u) \\
&=\lim_{n\to\infty}\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u) \\
&=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x_0)
\end{aligned} \tag{37}$$

情形 2：若 $x_0 \notin S_0$，对任意的 $x_n \to x_0$，显然有

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{R^m} f(x_n, u)\mu_n(\omega, du)+\delta_{S_n(\omega)}(x_n)\right]\leqslant +\infty$$
$$=\int_{R^m} f(x_0, u)\mu_0(du)+\delta_{S_0}(x_0) \tag{38}$$

由（37）式和（38）式知，（36）式成立. 于是结合（33）式和（36）式及定义 5.5 立知本定理成立.

5.3.3 几乎处处上半收敛

定义 5.9 设 $\{S_n(\omega);\ n\in\mathbf{N}\}$ 是随机集合序列，如果存在零测集 $N\subset\Omega$，使得对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N$，满足

$$\lim_{n\to\infty} e(S_n(\omega),\ S_0)=0$$

则称随机集合序列 $\{S_n(\omega);\ n\in\mathbf{N}\}$ 几乎处处上半收敛于 S_0，记为

$$\lim_{n\to\infty} e(S_n(\omega),\ S_0)=0.\quad \text{a. s}$$

定理 5.13 如果满足下列两个条件：

（1）$f(x, u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 连续，且存在关于 μ_0 可积的函数 $\beta(u)$，使得

$$|f(x, u)|\leqslant\beta(u)$$

（2） $g_i(x, u)$ （$i=1, 2, \cdots, d$）关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 下半连续，存在关于 μ_0 可积的函数 $\gamma(u)$，使得对 $i=1, 2, \cdots, d$，均有 $g_i(x, u)\geqslant\gamma(u)$，且 S_0 为正则的，
则

$$\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_n}(\omega),\ \widehat{M}_0)=0.\quad \text{a. s}$$

证明 由 S_0 的正则性和 D 的紧致性及定理 5.10（1）易知，S_0 为非空紧集，结合定理 5.11（1）可知，$\widehat{M}_0=M_0\neq\varnothing$. 注意到 $S_0\neq\varnothing$，由定理 5.11 知，存在零测集 $N_1\subset\Omega$，使得对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N_1$，存在 $n_0(\omega)$，当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时，$S_0(\omega)\neq\varnothing$. 又由定理 5.10（2）及 D 的

紧致性知，$S_n(\omega)$ 为非空紧集，结合推论 6(2)知，$\widehat{M}_n(\omega)=M_n(\omega)\neq\varnothing$. 由定理 5.12 知，存在零测集 $N_2\subset\Omega$，使得对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N_2$，有

$$\left[\int_{R^m} f(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x)\right] \xrightarrow{\text{epi}} \left[\int_{R^m} f(x,u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x)\right] \tag{39}$$

令 $N=\bigcup_{i=1}^{2}N_i$，则 N 为零测集.

为了证明对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N$，有

$$\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_n}(\omega),\ \widehat{M}_0)=0$$

即需证明对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N$ 和对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0(\omega)$，当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时，有

$$e(\widehat{M_n}(\omega),\ \widehat{M}_0)<\varepsilon$$

也即需证明对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N$ 和对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0(\omega)$，当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时，有

$$\widehat{M_n}(\omega)\subset\widehat{M}_0+B_\varepsilon(0)$$

这里 $B_\varepsilon(0)$ 为 N 维欧氏空间中的中心在原点、半径为 ε 的开球.

下面我们证明对任意固定的 $\omega\in\Omega\setminus N$ 和对任意包含 $\widehat{M}_0$ 的开集 V，存在 $n_0(\omega)$，使得当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时，有

$$\widehat{M_n}(\omega)\subset V$$

反设此结论不成立，则存在 $\{n_k(\omega)\}$ 和 $\{x_{n_k(\omega)}\}$，使得 $x_{n_k}\in\widehat{M_{n_k}}(\omega)$，但 $x_{n_k}\notin V$. 注意到 $\widehat{M_n}(\omega)\subset D$ 和 D 的紧致性，则 $\{x_{n_k(\omega)}\}$ 必存在聚点 $x_0(\omega)$. 又由于 V 为开集，故 $x_0(\omega)\notin V$. 另一方面，由（39）式及文献[8]命题 3.3 可知，$x_0(\omega)\in\widehat{M_0}$，这与 $\widehat{M_0}\subset V$ 矛盾. 特别地，取 $V=\widehat{M_0}+B_\varepsilon(0)$. 证毕.

推论 7 如果满足下列两个条件:

(1) $f(x, u)$关于$\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$可测,对任意固定的$u$关于$x$连续,且存在关于$\mu_0$可积的函数$\beta(u)$,使得

$$|f(x, u)| \leqslant \beta(u)$$

(2) $g_i(x, u)$ ($i=1, 2, \cdots, d$) 关于$\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$可测,对任意固定的$u$关于$x$下半连续,存在关于$\mu_0$可积的函数$\gamma(u)$,使得对$i=1, 2, \cdots, d$,均有$g_i(x, u)\geqslant\gamma(u)$,且$S_0$为正则的,

则

$$\lim_{n\to\infty} e(M_n(\omega), M_0)=0 . \quad \text{a. s}$$

证明 注意到$M_n(\omega)=\widehat{M}_n(\omega)$且$M_0=\widehat{M}_0$,由定理 5.13 知推论 7 成立.

5.4 随机规划逼近最优解集的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性

本节对随机规划逼近问题最优解集的稳定性进行了系统的研究.首先讨论了参数规划问题最优解集集值映射的连续性;其次利用集值分析理论证明了随机规划最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

5.4.1 引 言

近年来,关于随机规划问题稳定性的研究已有一些好的结果,然而,也只有为数不多的文献针对随机规划问题最优解集集值随机变量的性质进行了研究. Salinetti 和 Wets 等利用随机集理论对其最优值分布收敛性做了较详细的研究,特别是 Vogel 利用可测集值映射的收敛和正常被积函数的上图收敛研究了随机规划最优解集集值

随机变量的几乎处处收敛、概率收敛的稳定性. 然而随机规划逼近问题最优解集稳定性的研究实质上是依赖于参数规划问题最优解集集值映射的连续性和集值分析理论. 但是，参数规划问题最优解集集值映射通常只具有上半连续性，不具有下半连续性，而已有的一些文献主要针对参数规划问题最优值的各种凸性进行了研究，但对参数规划问题最优解集集值映射的连续性目前却尚无任何研究.

本节对随机规划逼近问题最优解集的稳定性进行了较系统的研究. 首先讨论了参数规划问题最优解集集值映射的半连续性；其次利用集值分析理论证明了随机规划最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

设 $P_0(R^N)$、 $P_f(R^N)$ 和 $P_k(R^N)$ 分别表示 R^N 中的非空子集、非空闭子集、非空紧子集全体， $x\in R^N$ 到 $S\subset R^N$ 的距离函数定义为

$$d(x,S)=\inf\{\|x-y\|:y\in S\}$$

称集值映射 $F:R^m\to P_0(R^N)$ 可测，若对任意的闭集 $A\subset R^N$ ，

$$\left\{u\in R^m:F(u)\cap A\neq\varnothing\right\}$$

是 R^m 中的 Borel 集；称集值映射 F 下半连续（上半连续），若对任意的开集 $G\subset R^N$ （闭集 $A\subset R^N$ ），

$$\left\{u\in R^m:F(u)\cap G\neq\varnothing\right\}$$

是 R^m 中的开集（相应地，

$$\left\{u\in R^m:F(u)\cap A\neq\varnothing\right\}$$

是 R^m 中的闭集）；集值映射 F 既上半连续又下半连续，则称 F 连续. 称集值映射 F 强下半连续，若 $\forall u\in R^m$， $\forall x\in F(u)$ ，存在 x 的邻域 $N(x)$ 和 u 的邻域 $V(u)$ ，使得当 $v\in V(u)$ 时，有

$$N(x)\subset F(v)$$

称 $F:\Omega\to P_f(R^N)$ 为集值随机变量，若它关于 F 可测. 令 μ_ξ、 μ_{ξ_n} 分

别为随机变量$\xi(\omega)$、$\xi_n(\omega)$在R^m上诱导的概率测度，称随机变量$\{\xi_n(\omega)\}_{n\geq 1}$依分布收敛于$\xi(\omega)$，若$\{\mu_{\xi_n}\}_{n\geq 1}$弱收敛于$\mu_\xi$，记为$\xi_n(\omega)\xrightarrow{d}\xi(\omega)$．集值随机变量$\{F_n\}_{n\geq 1}$依分布收敛于$F$，记为$F_n\xrightarrow{w}F$．

考虑下列随机规划问题：

$$\min f(x,\ \xi(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0 \\ i\in I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ d\} \end{cases} \tag{40}$$

和问题（40）的逼近问题：

$$\min f(x,\ \xi_n(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g(x,\ \xi_n(\omega))\leqslant 0 \\ i\in I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ d\} \end{cases} \tag{41}$$

其中，$x=(x_1,x_2,\ \cdots,\ x_N)^{\mathrm{T}}\in R^N$是$N$维欧氏空间$R^N$中的实值向量，$\xi(\omega)$、$\xi_n(\omega)$为定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$m$维随机向量．$f:R^N\times R^m\to R$，$g_i:R^N\times R^m\to R$，$i\in I=\{1,2,\cdots,d\}$．问题（40）和问题（41）的最优解集分别记为$M(\xi(\omega))$和$M(\xi_n(\omega))$．

5.4.2　参数非线性规划问题最优解集集值映射的半连续性

首先我们给出与非线性随机规划问题（40）对应的参数非线性规划问题：

$$\min f(x,\ u)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x,\ u)\leqslant 0 \\ i\in I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ d\} \end{cases} \tag{42}$$

的最优解集集值映射的半连续性．

参数非线性规划问题（42）的最优值函数定义为

$$z(u)=\begin{cases}\min\limits_{x\in J(u)} f(x,\ u), & J(u)\neq\varnothing\\ \infty, & 其他\end{cases} \tag{43}$$

最优解集集值映射分别定义为

$$M(u)=\left\{x\in R^n : x\in J(u), f(x,\ u)\leqslant z(u)\right\}$$

其中可行解集集值映射

$$J(u)=\left\{x\in R^n : g_i(x,\ u)\leqslant 0,\ i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ d\}\right\} \tag{44}$$

本节始终假定 $\forall u\in R^m$，存在 u 的邻域 $V(u)$，$\bigcup\limits_{v\in V(u)} J(v)$ 是非空有界集.

定义 5.10 称函数 $f: R^m\to\overline{R^d}$ 关于 x 上半连续，如果 $\forall\alpha\in R$，

$$\left\{x\in R^n : f(x)<\alpha\right\}$$

为 R^n 中开集；称函数 $f(x)$ 关于 x 下半连续，如果 $\forall\alpha\in R$，

$$\left\{x\in R^n : f(x)\leqslant\alpha\right\}$$

为 R^n 中的闭集.

注：定义 5.10 与文献 [122] 定义 1.5.5 这两种对函数上下半连续的定义是等价的.

引理 1 若函数 $f(x,\ u)$ 及 $g_i(x,\ u)(i\in I)$ 关于 $(x,\ u)$ 下半连续，则函数 $z(u)$ 下半连续.

证明 由定义 5.10 知，只要证明 $\forall\alpha\in R$，$\left\{u\in R^m : z(x)\leqslant\alpha\right\}$ 为 R^m 中的闭集即可.

由于

$$\left\{u : \min_{x\in J(u)} f(x,\ u)\leqslant\alpha\right\}=\left\{u : J(u)\bigcap[x : f(x,\ u)\leqslant\alpha]\neq\varnothing\right\}$$

设 $\{u_n\}_{n\geq 1}\subset\left\{u\in R^m: J(u)\bigcap[x:f(x,\ u)\leqslant\alpha]\neq\varnothing\right\}$，且 $u_n\to u_0$，则

$$u_n\in\left\{u\in R^m: J(u)\bigcap[x:f(x,\ u)\leqslant\alpha]\neq\varnothing\right\}$$

即存在 $x_n\in J(u_n)\bigcap[x:f(x_n,\ u_n)\leqslant\alpha]$，因此

$$x_n\in J(u_n)\quad 且\quad f(x_n,\ u_n)\leqslant\alpha$$

注意到 $\forall u\in R^m$,存在 u 的邻域 $V(u)$，$\bigcup\limits_{v\in V(u)}J(v)$ 是非空有界集，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J(u_n)$ 是非空有界集．而 $\{x_n\}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J(u_n)$，因而存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x_0$，故 $(x_{n_k},\ u_{n_k})\to(x_0,\ u_0)$．又由于函数 $f(x,\ u)$ 关于 $(x,\ u)$ 下半连续，由定义 5.10 知，$\{(x,\ u):f(x,\ u)\leqslant\alpha\}$ 为 $R^n\times R^m$ 中的闭集，故

$$f(x_0,\ u_0)\leqslant\alpha$$

同理，$g_i(x_0,\ u_0)\leqslant 0$，$i\in I$．因此

$$x_0\in J(u_0)\quad 且\quad f(x_0,\ u_0)\leqslant\alpha$$

故

$$u_0\in\left\{u\in R^m: J(u)\bigcap[x:f(x,u)\leqslant\alpha]\neq\varnothing\right\}$$

即 $\left\{u\in R^m: J(u)\bigcap[x:f(x,\ u)\leqslant\alpha]\neq\varnothing\right\}$ 是 R^m 中的闭集.

引理 2 设函数 $f(x,\ u)$ 对固定的 x 关于 u 上半连续，对固定的 u 关于 x 连续，$g_i(x,\ u)(i\in I)$ 对固定的 x 关于 u 上半连续，对固定的 u 关于 x 下半连续，且 $\forall u\in R^m$，$\mathrm{cl}J^{\circ}(u)=J(u)$，则函数 $z(u)$ 上半连续. 其中

$$J^{\circ}(u)=\left\{x\in R^n: g_i(x,\ u)<0, i\in I\right\}$$

证明 由定义 5.10 知，只要证明 $\forall\alpha\in R$，$\left\{u\in R^m: z(x)<\alpha\right\}$ 为

R^m 中开集即可.

由于 $\forall u \in R^m$， $M(u) \neq \varnothing$，则

$$\left\{u: \min_{x \in J(u)} f(x, u) < \alpha\right\} = \{u: J(u) \cap [x: f(x, u) < \alpha] \neq \varnothing\}$$

设 $u_0 \in \left\{u: \min_{x \in J(u)} f(x, u) < \alpha\right\}$，则

$$u_0 \in \{u: J(u) \cap [x: f(x, u) < \alpha] \neq \varnothing\}$$

即

$$J(u) \cap [x: f(x, u) < \alpha] \neq \varnothing$$

由于函数 $f(x, u)$ 对固定的 u 关于 x 连续，$g_i(x, u)(i \in I)$ 对固定的 u 关于 x 下半连续，则 $J(u_0)$ 是闭集且 $[x: f(x, u_0) < \alpha]$ 是开集. 于是由 $\mathrm{cl}J^{\circ}(u_0) = J(u_0)$ 及文献[13]引理 1.3.3 可知，

$$J^{\circ}(u_0) \cap [x: f(x, u_0) < \alpha] \neq \varnothing$$

则存在 $u_0 \in [x: f(x, u_0) < \alpha]$ 且 $u_0 \in J^{\circ}(u_0)$，即

$$g_i(x_0, u_0) < 0, \quad \forall i \in I$$

由于函数 $g_i(x_0, u) < 0 (i \in I)$ 关于 u 上半连续，故由定义 5.10 可知，$\{u: g_i(x_0, u) < 0\}$ 为包含点 u_0 的开集，则存在 u_0 的邻域 $V_i(u_0)$ 满足 $V_i(u_0) \subset \{u: g_i(x_0, u) < 0\}$. 令 $V_1(u_0) = \bigcap_{i \in I} V_i(u_0)$，因此，当 $u \in V_1(u_0)$ 时，有

$$g_i(x_0, u) < 0 \quad (i \in I)$$

即当 $u \in V_1(u_0)$ 时，有

$$x_0 \in J(u_0)$$

同理，$x_0 \in [x: f(x, u_0) < \alpha]$，即

$$f(x_0, u_0) < \alpha$$

由于函数 $f(x_0, u)$ 关于 u 上半连续，于是存在 u_0 的邻域 $V_2(u_0)$，使得

当 $u \in V_2(u_0)$ 时，有

$$f(x_0,\ u) < \alpha$$

即当 $u \in V_2(u_0)$ 时，有

$$x_0 \in \left[x \mid f(x,\ u) < \alpha\right]$$

令 $V(u_0) = V_1(u_0) \cap V_2(u_0)$. 故当 $u \in V(u_0)$ 时，有

$$\left\{u : J(u) \cap [x : f(x,\ u) < \alpha] \neq \varnothing\right\}$$

即

$$V(u_0) \subset \left\{u : J(u) \cap [x : f(x,\ u) < \alpha] \neq \varnothing\right\}$$

故 $\left\{u : J(u) \cap [x : f(x,\ u) < \alpha] \neq \varnothing\right\}$ 是 R^m 中的开集.

引理 3（1） 设函数 $f(x, u)$ 及 $g_i(x, u)(i \in I)$ 关于 (x, u) 下半连续，对固定的 x 关于 u 上半连续，函数 $f(x, u)$ 对固定的 u 关于 x 上半连续，且 $\forall u \in R^m$，$\mathrm{cl}J^{\circ}(u) = J(u)$，则集值映射 $M(u)$ 是紧值且上半连续.

（2）假设 $f(x, u)$ 关于 (x, u) 下半连续，对固定的 x 关于 u 上半连续，函数 $g_i(x, u)(i \in I)$ 关于 (x, u) 连续，而且对任意的 $\forall u \in R^m$，$\mathrm{cl}J^{\circ}(u) = J(u)$ 且 $\mathrm{cl}\{\Gamma(u) \cap J^{\circ}(u)\} = \Gamma(u) \cap J(u)$，则集值映射 $M(u)$ 是紧值且下半连续. 其中

$$\Gamma(u) = \{x \in R^N : f(x,\ u) - z(u) \leqslant 0\}$$

$$\Gamma^{\circ}(u) = \{x \in R^N : f(x,\ u) - z(u) < 0\}$$

证明（1） 因为

$$M(u) = \left\{x \in R^n : x \in J(u),\ f(x,\ u) \leqslant z(u)\right\}$$

$$= \left\{x \in R^n : x \in J(u),\ f(x,\ u) - z(u) \leqslant 0\right\} \qquad (45)$$

由于函数 $f(x, u)$ 关于 (x, u) 下半连续，且由引理 2 可知函数 $z(u)$ 上半连续，从而函数 $f(x, u) - z(u)$ 关于 (x, u) 下半连续. 因此集值映射

$$\Gamma(u)=\{x\in R^N: f(x,u)-z(u)\leqslant 0\}$$

是闭值集值映射.

下面证明集值映射 $\Gamma(u)$ 的上半连续性. 若对任意的闭集 A，设 $\{u_n\}_{n\geqslant 1}\subset\{u\in R^m:\Gamma(u)\cap A\neq\varnothing\}$ 且 $u_n\to u_0$，则

$$u_n\in\{u\in R^m:\Gamma(u)\cap A\neq\varnothing\}$$

即存在 $x_n\in\Gamma(u_n)\cap A$. 因此 $x_n\in\Gamma(u_n)$ 且 $x_n\in A$. 注意到 $\bigcup_{v\in V(u)}J(v)$ 是非空有界集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}J(u_n)$ 是非空有界集. 而 $\{x_n\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}J(u_n)$，因而存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x_0$. 故 $(x_{n_k},u_{n_k})\to(x_0,u_0)$ 且 $x_0\in A$. 又由函数 $f(x,u)-z(u)$ 关于 (x,u) 下半连续性及 $x_{n_k}\in\Gamma(u_{n_k})$，故

$$f(x_0,u_0)-z(u_0)\leqslant 0$$

因此 $x_0\in\Gamma(u_0)\cap A$，故

$$u_0\in\{u\in R^m:\Gamma(u)\cap A\neq\varnothing\}$$

即 $\{u\in R^m:\Gamma(u)\cap A\neq\varnothing\}$ 是 R^m 中的闭集.

类似于前半部分的证明方法可得，$J(u)$ 是紧值且上半连续. 注意到 $\forall u\in R^m$，$M(u)\neq\varnothing$，从而由文献[123]命题 1.3.16 可知，集值映射 $\Gamma(u)$ 为紧值且上半连续.

（2）先证明集值映射 $\Gamma(u)$ 为紧值且下半连续. 对任意的开集 $O\subset R^N$，设 $u_0\in\{u\in R^m:\Gamma(u)\cap O\neq\varnothing\}$，即 $\Gamma(u_0)\cap O\neq\varnothing$. 注意到 $\Gamma(u_0)$ 是闭集，于是由 $\mathrm{cl}\Gamma^{\circ}(u)=\Gamma(u)$ 及文献[81]引理 1.3.3 可知，$\Gamma^{\circ}(u_0)\cap G\neq\varnothing$. 则存在 $x_0\in O$ 且 $x_0\in\Gamma^{\circ}(u_0)$，即

$$g_i(x_0,u_0)<0,\quad\forall i\in I$$

由引理 1（2）可知，最优值函数 $z(u)$ 关于 u 下半连续，故 $-z(u)$ 关

于 u 上半连续．又函数 $f(x_0, u)$ 关于 u 上半连续，故 $f(x_0, u)-z(u)$ 关于 u 上半连续．于是由定义 5.10 可知，$\{u: f(x_0, u)-z(u)<0\}$ 为包含点 u_0 的开集，则存在 u_0 的邻域 $V(u_0)$，使得

$$V(u_0)\subset\{u: f(x_0, u)-z(u)<0\}$$

于是当 $u\in V(u_0)$ 时，有 $x_0\in\Gamma^{\circ}(u)\subset\Gamma(u)$．注意到 $x_0\in O$，从而当 $u\in V(u_0)$ 时，有

$$V(u_0)\subset\{u\in R^m: \Gamma(u)\cap O\neq\varnothing\}$$

故 $\{u\in R^m: \Gamma(u)\cap O\neq\varnothing\}$ 是 R^m 中的开集．

其次证明集值映射 $J^{\circ}(u)$ 是强下半连续的．设 $x_0\in J^{\circ}(u_0)$，即 $g_i(x_0, u_0)<0, \forall i\in I$．由函数 $g_i(x, u)(i\in I)$ 关于 (x, u) 连续，则函数 $g_i(x, u)(i\in I)$ 关于 (x,u) 上半连续．故由定义 5.10 可知，$\{(x, u): g_i(x, u)<0\}$ 为包含点 (x_0, u_0) 的开集，从而 $\{(x, u): g_i(x, u)<0, i\in I\}$ 为包含点 (x_0, u_0) 的开集．则存在 (x_0, u_0) 的邻域 $N(x_0)\times V(u_0)$（这里 $N(x_0)$ 为 x_0 的邻域，$V(u_0)$ 为 u_0 的邻域），使得

$$N(x_0)\times V(u_0)\subset\{(x, u): g_i(x, u)<0, i\in I\}$$

于是当 $(x, u)\in N(x_0)\times V(u_0)$ 时，有

$$g_i(x, u)<0, \quad \forall i\in I$$

即当 $x\in N(x_0)$ 且 $u\in V(u_0)$ 时，有

$$g_i(x, u)<0, \quad \forall i\in I$$

故当 $u\in V(u_0)$ 时，有

$$N(x_0)\subset J^{\circ}(u_0)$$

再注意到 $\mathrm{cl}\{\Gamma(u)\cap J^{\circ}(u)\}=\Gamma(u)\cap J(u)$，由（45）式及文献[110]引理 2.2.5 可知，集值映射 $M(u)$ 为紧值且下半连续．

推论 8 若函数 $f(x, u)$、$g_i(x, u)(i \in I)$ 关于 (x, u) 连续，$\forall u \in R^m$，$\mathrm{cl}J^*(u) = J(u)$，$\mathrm{cl}\Gamma^*(u) = \Gamma(u)$，且

$$\mathrm{cl}\{\Gamma(u) \cap J^*(u)\} = \Gamma(u) \cap J(u)$$

则集值映射 $M(u)$ 连续.

引理 4 如果 $\xi(\omega)$ 是 m 维随机变量，函数 $f(x, u)$、$g_i(x, u)(i \in I)$ 关于 (x, u) 连续，$\forall u \in R^m$，$\mathrm{cl}J^*(u) = J(u)$，$\mathrm{cl}\Gamma^*(u) = \Gamma(u)$，且

$$\mathrm{cl}\{\Gamma(u) \cap J^*(u)\} = \Gamma(u) \cap J(u)$$

则 $M(\xi(\omega))$ 是集值随机变量.

证明 由引理 2 及可测集值映射的等价条件（文献[63], p. 275）可知，集值映射 $M(u)$ 是可测的，从而由集值映射的可测性理论可知 $M(\xi(\omega))$ 是集值随机变量.

5.4.3 最优解集的稳定性分析

本节讨论随机规划问题最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

定理 5.14 若 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$，且满足引理 3 的条件，则有

$$M(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{w} M(\xi(\omega))$$

证明 我们由文献[61]定理 2.5 可知，$M(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{w} M(\xi(\omega))$ 等价于随机过程 $\{d(x, M(\xi_n(\omega))), x \in R^N\}_{n \geq 1}$ 依分布收敛于 $\{d(x, M(\xi(\omega))), x \in R^N\}$. 由引理 2 可知，集值映射 $M(u)$ 连续. 从而由文献[122]定理 1.3.5 和定理 1.3.6 可得 $\forall u_0 \in R^m$，且对任意 $u_n \to u_0$，有

$$\lim_{n \to \infty} M(u_n) = M(u_0)$$

于是由文献[81]定理 1.5.32（也可参见文献[63，推论 2.3]）可知，

给定 $x\in R^N$ 以及 $\forall u_0\in R^m$，且对任意 $u_n\to u_0$，有

$$\lim_{n\to\infty} d(x,\ M(u_n)) = d(x,\ M(u_0))$$

因此对每个固定的 x，距离函数 $d(x,\ M(u))$ 关于 u 连续，从而对任意 $p\geqslant 1$，$\forall x_1,x_2,\cdots,x_p\in R^N$，下列映射：

$$K(u)=(d(x_1,\ M(u)),\ d(x_2,\ M(u)),\ \cdots,\ d(x_p,\ M(u)))$$

关于 u 也是连续的. 考虑随机向量

$$H(\omega)=(d(x_1,\ M(\xi(\omega))),\ d(x_2,\ M(\xi(\omega))),\ \cdots,\ d(x_p,\ M(\xi(\omega))))$$
$$H_n(\omega)=(d(x_1,\ M(\xi_n(\omega))),\ d(x_2,\ M(\xi_n(\omega))),\ \cdots,\ d(x_p,\ M(\xi_n(\omega))))$$

用 μ_H、μ_{H_n} 分别表示 $H(\omega)$、$H_n(\omega)$ 在 R^p 上诱导的概率测度，任给有界连续函数 $g:R^p\to R$，令 $h(u)=g(K(u))$，$\forall u\in R^m$，则 $h(u)$ 是 $R^m\to R$ 上的有界连续函数. 依题意有 $\mu_{\xi_n}\xrightarrow{w}\mu_\xi$，因此由测度弱收敛的定义及测度论知识可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{R^p} g(x)\mathrm{d}\mu_{H_n} &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(H_n(\omega))\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty}\int_{R^m} g(K(u))\mathrm{d}\mu_{\xi_n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{R^m} h(u)\mathrm{d}\mu_{\xi_n} = \int_{R^m} h(u)\mathrm{d}\mu_\xi\\ &= \int_{R^m} g(H(u))\mathrm{d}\mu_\xi = \int_\Omega g(H(\omega))\mathrm{d}P\\ &= \int_{R^p} g(x)\mathrm{d}\mu_H\end{aligned}$$

由 $g(\cdot)$ 的任意性可知，$\mu_{H_n}\xrightarrow{w}\mu_H$，即 $H_n(\omega)$ 依分布收敛于 $H(\omega)$. 依 $p\geqslant 1$ 以及 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 的任意性可知，随机过程 $\{d(x,\ M(\xi_n(\omega))),\ x\in R^N\}_{n\geqslant 1}$ 依分布收敛于 $\{d(x,\ M(\xi(\omega))),\ x\in R^N\}$. 于是

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{w}M(\xi(\omega))$$

定义 5.11　称集值随机变量 $(F_n)_{n\geqslant 1}$ 为

(1) 依概率上半收敛于 F，如果 $\forall\varepsilon>0,\ \forall K\in P_k(R^N)$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega:\left[F_n(\omega)\backslash U_\varepsilon F(\omega)\right]\cap K\neq\varnothing\right\}=0$$

记为 $F_n(\omega)\xrightarrow{u\text{-prob}}F(\omega)$;

（2）依概率下半收敛于 F，如果 $\forall\varepsilon>0,\ \forall K\in P_k(R^N)$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega:\left[F(\omega)\backslash U_\varepsilon F_n(\omega)\right]\cap K\neq\varnothing\right\}=0$$

记为 $F_n(\omega)\xrightarrow{l\text{-prob}}F(\omega)$;

（3）依概率收敛于 F，如果

$$F_n(\omega)\xrightarrow{u\text{-prob}}F(\omega)\quad 且\quad F_n(\omega)\xrightarrow{l\text{-prob}}F(\omega)$$

记为 $F_n(\omega)\xrightarrow{\text{prob}}F(\omega)$.

其中，$U_\varepsilon S$ 表示 $S\subset R^N$ 的 ε 邻域：$U_\varepsilon S=\{x\in R^N:d(x,\ S)<\varepsilon\}$.

定理 5.15 设 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{prob}}\xi(\omega)$，那么

（1）若在引理 3 的条件（1）下，有

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{u\text{-prob}}M(\xi(\omega))$$

（2）在引理 3 的条件（2）下，有

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{l\text{-prob}}M(\xi(\omega))$$

（3）在引理 3 的条件（1）和条件（2）下，有

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{prob}}M(\xi(\omega))$$

证明 （1）我们先证 $\forall\varepsilon>0$，$\forall u_0\in R^m$，$\exists\delta(u_0,\ \varepsilon)>0$，当 $\|u-u_0\|<\delta(u_0,\ \varepsilon)$ 时，有

$$\left[M(u)\backslash U_{\varepsilon_0}M(u_0)\right]=\varnothing$$

由引理 3(1) 可知，集值映射 $M(u)$ 为紧值且上半连续. 于是 $\forall\varepsilon_0>0$，$\forall u_0\in R^m$，$\exists\delta(u_0,\ \varepsilon)>0$，当 $\|u-u_0\|<\delta(u_0,\ \varepsilon_0)$ 时，有

$$M(u)\subset U_{\varepsilon_0}M(u_0)$$

故

$$\left[M(u)\backslash U_{\varepsilon_0}M(u_0)\right]=\varnothing$$

次证对紧集$C\subset R^m$，$\exists\delta(\varepsilon_0,C)>0$，当$u\in C$且$\|v-u\|<\delta(\varepsilon_0, C)$时，有

$$\left[M(v)\backslash U_{\varepsilon_0}M(u)\right]=\varnothing$$

设$C\subset R^m$为紧集，$\forall u\in C$，令

$$V(u)=\left\{v\in R^m:\|v-u\|<\delta(u,\varepsilon_0),\left[M(v)\backslash U_{\varepsilon_0}M(u)\right]=\varnothing\right\}$$

则$\bigcup_{u\in C}V(u)$为紧集C的一个开覆盖，故存在有限个

$$V(u_i)=\left\{v\in R^m:\|v-u_i\|<\delta(u_i,\ \varepsilon),\ \left[M(v)\backslash U_{\varepsilon_0}M(u_i)\right]=\varnothing\right\},\quad i=1,\ \cdots,\ k$$

使得

$$\bigcup_{\substack{u_i\in C,\\ i=1,\cdots,k}}V(u_i)\supset C$$

取$\delta(\varepsilon_0,\ C)=\min\left\{\delta(u_i,\ \varepsilon_0):i=1,\ \cdots,\ k\right\}$，当$u\in C$且$\|v-u\|<\delta(\varepsilon_0,\ C)$时，有

$$\left[M(v)\backslash U_{\varepsilon_0}M(u)\right]=\varnothing$$

再证$\forall\alpha>0,\ \forall\varepsilon_0>0$，$\forall K\in P_k(R^N)$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\left[M(\xi_n(\omega))\backslash U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}\leqslant\alpha$$

由于$\xi(\omega)$是m维随机变量，因此$\forall\alpha>0, \exists M>0$，使得

$$P\left\{\omega:\|\xi(\omega)\|>M\right\}\leqslant\alpha$$

而$C_\alpha=\left\{u\in R^m:\|u\|\leqslant M\right\}$是紧集，故存在$\delta(\varepsilon_0,\ \alpha)>0$，当$u\in C_\alpha$且

$\|v-u\|<\delta(\varepsilon_0,\ \alpha)$时，有

$$\left[M(v)\setminus U_{\varepsilon_0}M(u)\right]=\varnothing$$

由于 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{prob}}\xi(\omega)$，则

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\xi(\omega)\in C_\alpha,\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}+\\
&\quad\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\xi(\omega)\notin C_\alpha,\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}P\Big\{\omega:\|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\|<\delta(\varepsilon_0,\alpha),\xi(\omega)\in C_\alpha,\\
&\qquad\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\Big\}+\\
&\quad\lim_{n\to\infty}P\Big\{\omega:\|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\|\geqslant\delta(\varepsilon_0,\alpha),\xi(\omega)\in C_\alpha,\\
&\qquad\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\Big\}+\\
&\quad\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\xi(\omega)\notin C_\alpha,\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}\\
&\leqslant P(\varnothing)+\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\|\geqslant\delta(\varepsilon_0,\alpha)\right\}+\lim_{n\to 0}P\left\{\omega:\xi(\omega)\notin C_\alpha\right\}\\
&\leqslant\alpha
\end{aligned}$$

由 α 的任意性可知，$\forall\varepsilon_0>0$，$\forall K\in P_k(R^N)$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}$$

即

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{u\text{-prob}}M(\xi(\omega))$$

（2）$\forall\varepsilon_0>0$，设 $x\in M(u_0)$，则 $M(u_0)\cap B^{\circ}_{\varepsilon_0}(x)\neq\varnothing$，其中

$$B^{\circ}_{\varepsilon_0}(x)=\left\{y\in R^N:\|y-x\|<\varepsilon_0\right\}$$

由引理 3（2）可知，集值映射 $M(u)$ 下半连续. 于是 $\exists\delta(u_0, \varepsilon_0)>0$，当 $\|u-u_0\|<\delta(u_0, \varepsilon_0)$ 时，有

$$M(u)\cap B^{\circ}_{\varepsilon_0}(x)\neq\varnothing$$

即 $x\in U_{\varepsilon_0}M(u)$. 故

$$\left[M(u_0)\setminus U_{\varepsilon_0}M(u)\right]=\varnothing$$

其余类似于定理 5.15（1）的证明.

（3）由定理 5.15（1）和（2）易知，

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{prob}}M(\xi(\omega))$$

定理 5.16 设 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{prob}}\xi(\omega)$，且存在紧集 C，使得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi_n(\omega)\in C\}=1$$

如果问题（42）满足引理 3 的条件（1）和（2）之一，则

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{prob}}M(\xi(\omega))$$

证明 由定理 5.15（1）及定义 5.11（3）可知，只要证明 $M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{l\text{-prob}}M(\xi(\omega))$ 即可. 由于 C 是紧集，故由定理 5.15 的证明过程可知，对 $\forall\varepsilon_0>0$，$\exists\delta(\varepsilon_0)>0$，使得当 $u\in C$ 且 $\|u-v\|<\delta(\varepsilon_0)$ 时，有

$$\left[M(v)\setminus U_{\varepsilon_0}M(u)\right]=\varnothing$$

又由于 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{prob}}\xi(\omega)$，而且 $\lim\limits_{n\to 0}P\{\omega:\xi_n(\omega)\in C\}=1$, 则 $\forall\varepsilon_0>0$，$\forall K\in P_k(R^N)$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\left[M(\xi(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi_n(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}\\=&\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\xi_n(\omega)\in C,\left[M(\xi(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi_n(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}+\\&\lim_{n\to\infty}P\left\{\omega:\xi_n(\omega)\notin C,\left[M(\xi(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi_n(\omega))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\Big\{\omega : \xi_n(\omega)\in C, \|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\| < \delta(\varepsilon_0),$$

$$\Big[M(\xi(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0} M(\xi_n(\omega))\Big]\cap K \neq \varnothing\Big\} +$$

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\omega : \xi_n(\omega)\in C, \|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\| \geqslant \delta(\varepsilon_0),$$

$$\Big[M(\xi(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0} M(\xi_n(\omega))\Big]\cap K \neq \varnothing\Big\} +$$

$$\lim_{n\to\infty} P\Big\{\omega : \xi_n(\omega)\notin C, \Big[M(\xi(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0} M(\xi_n(\omega))\Big]\cap K \neq \varnothing\Big\}$$

$$= P(\varnothing) + \lim_{n\to\infty} P\Big\{\omega : \|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\| \geqslant \delta(\varepsilon_0)\Big\} + \lim_{n\to\infty} P\{\omega : \xi_n(\omega)\notin C\}$$

$$\leqslant \alpha$$

即

$$M(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{l\text{-prob}} M(\xi(\omega))$$

定义 5.12 称集值映射 $(F_n)_{n\geqslant 1}$ 为

（1）几乎处处上半收敛于 F，如果

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(\omega) \subset F(\omega), \quad P\text{-a.s}$$

记为 $F_n(\omega) \xrightarrow{u\text{-a.s}} F(\omega)$;

（2）几乎处处下半收敛于 F，如果

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(\omega) \supset F(\omega), \quad P\text{-a.s}$$

记为 $F_n(\omega) \xrightarrow{l\text{-a.s}} F(\omega)$;

（3）几乎处处收敛于 F，如果

$$F_n(\omega) \xrightarrow{u\text{-a.s}} F(\omega) \quad 且 \quad F_n(\omega) \xrightarrow{l\text{-a.s}} F(\omega)$$

其中

$$\limsup_{n\to\infty} F_n = \Big\{x\in R^N : x = \lim_{k\to 0} x_{n_k},\ x_{n_k}\in F_{n_k},\ \forall k\in \mathbf{N}\Big\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} F_n = \Big\{x\in R^N : x = \lim_{n\to 0} x_n,\ x_n\in F_n,\ \forall n\geqslant n_0\Big\}$$

定理 5.17 设 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{\text{a.s}} \xi(\omega)$，那么

（1）若在引理 3 的条件（1）下，有

$$M(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{u\text{-a.s.}} M(\xi(\omega))$$

（2）在引理 3 的条件（2）下，有

$$M(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{l\text{-a.s.}} M(\xi(\omega))$$

（3）在引理 3 的条件（1）和（2）下，有

$$M(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{\text{a.s.}} M(\xi(\omega))$$

证明　（1）由于 $\forall \omega \in \Omega$，$M(\xi(\omega))$ 是闭集，由文献[63]定理 2.2 可知，

$$\limsup_{n\to\infty} M(\xi_n(\omega)) \subset M(\xi(\omega)), \quad P\text{-a.s}$$

等价于 $\forall \varepsilon_0 > 0$，

$$\lim_{n\to\infty}\left[M(\xi_n(\omega)) \setminus U_{\varepsilon_0} M(\xi(\omega))\right] = \varnothing, \quad P\text{-a.s}$$

由引理 4（1）可知，集值映射 $M(u)$ 上半连续. 于是由定理 5.15（1）的证明过程可知，对上述 $\varepsilon_0 > 0$，$\forall \alpha > 0$，$\exists \delta(\varepsilon_0, \alpha) > 0$ 及紧集 C_α，当 $u \in C_\alpha$ 且 $\|v - u\| < \delta(\varepsilon_0, \alpha)$ 时，有

$$\left[M(v) \setminus U_{\varepsilon_0} M(u)\right] = \varnothing \quad 且 \quad P\left\{\omega : \xi(\omega) \notin C_\alpha\right\} \leqslant \alpha$$

而 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{\text{a.s}} \xi(\omega)$，因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \left[\bigcup_{m>n} (M(\xi_m(\omega)) \setminus U_{\varepsilon_0} M(\xi(\omega)))\right] \cap K \neq \varnothing\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \bigcup_{m>n} \|\xi_m(\omega) - \xi(\omega)\| \geqslant \delta(\varepsilon_0, \alpha),\ \xi(\omega) \in C_\alpha,\right. \\
&\qquad \left.\left[\bigcup_{m>n} (M(\xi_m(\omega)) \setminus U_{\varepsilon_0} M(\xi(\omega)))\right] \cap K \neq \varnothing\right\} +
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \bigcap_{m\geqslant n} \|\xi_m(\omega)-\xi(\omega)\| < \delta(\varepsilon_0,\ \alpha),\ \xi(\omega)\in C_\alpha,\right.$$

$$\left.\left[\bigcup_{m\geqslant n}(M(\xi_m(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega)))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}+$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \xi(\omega)\notin C_\alpha, \left[\bigcup_{m\geqslant n}(M(\xi_m(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega)))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \bigcup_{m\geqslant n}\|\xi_m(\omega)-\xi(\omega)\|\geqslant\delta(\varepsilon_0,\alpha)\right\}+P(\varnothing)+\alpha$$

$$\leqslant\alpha$$

由 α 的任意性可知，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\omega : \left[\bigcup_{m\geqslant n}(M(\xi_m(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega)))\right]\cap K\neq\varnothing\right\}=0$$

于是由文献[63]定理 2. 2 及定理 3. 4 可得，

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty}\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]\neq\varnothing\right\}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left[M(\xi_n(\omega))\setminus U_{\varepsilon_0}M(\xi(\omega))\right]=\varnothing,\quad P\text{-a.s}$$

其余类似得出.

定理 5.18 设 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{a.s}}\xi(\omega)$ 且存在紧集 C，使得

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega : \xi_n(\omega)\in C\}=1$$

如果问题（42）满足引理 3 的条件（1）和（2）之一，则

$$M(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{a.s.}}M(\xi(\omega))$$

证明 仿照定理 5.16 的证明并结合定理 5.17 的证明易得.

6 随机规划逼近ε-最优解集的稳定性

本章分别给出了随机规划期望模型、概率约束规划模型、经验逼近模型ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性，讨论了随机规划期望模型、概率约束规划模型、经验逼近模型逼近最优值的收敛性，并研究了随机规划期望模型、概率约束规划模型、经验逼近模型ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性条件，得到了随机规划ε-逼近最优解集 Hausdorff 收敛的一个充分条件. 最后，讨论了随机规划问题ε-最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

6.1 期望模型ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性

最优解集的收敛性是随机规划逼近问题的重要特征之一，因而近年来关于随机规划问题的上半收敛性得到了广泛而深入地研究，但是，目前关于随机规划逼近问题最优解集的下半收敛性研究进展较为缓慢，其原因是一般非线性随机规划的逼近最优解集通常只具有上半收敛性，而不具有下半收敛性，因而更不具有 Hausdorff 收敛性，因此一些学者转向研究ε-最优解集的收敛性. 文献[11]研究了样

本轨道优化问题的 ε-逼近最优解集的上半收敛性；文献[123]讨论了凸随机规划的 ε-逼近最优解集的 Lipschitz 连续性. 我们在第 5 章第 1 节中，利用上图收敛性给出了随机规划逼近最优解集上半收敛的一个充分条件，但对 ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性尚未研究.

本章讨论了随机规划期望模型逼近最优值的收敛性，研究了随机规划期望模型 ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性条件，得到了随机规划期望模型 ε-逼近最优解集 Hausdorff 收敛的一个充分条件.

考虑如下的随机规划问题：

$$\min Ef(x,\ \xi(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0 \\ x \in D \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)^{\mathrm{T}} \in R^N$，$\xi(\omega)$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的 m 维连续型随机向量，紧集 $D \subset R^N$ 是所有的确定约束集，$f: R^N \times R^m \to R$，$g: R^N \times R^m \to R^d$，$E$ 表示随机变量函数的期望泛函. Z_0、M_0、M_0^{ε} 分别表示问题（1）的最优值、最优解集、ε-最优解集，即

$$Z_0 = \min\left\{Ef(x,\ \xi(\omega)) : Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ x \in D\right\}$$

$$M_0 = \left\{x \in D \subset R^N : Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi(\omega)) \leqslant Z_0\right\}$$

$$M_0^{\varepsilon} = \left\{x \in D \subset R^N : Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi(\omega)) \leqslant Z_0 + \varepsilon\right\}$$

设 $\xi_n(\omega)$ 为 $\xi(\omega)$ 的离散化随机变量序列，且随机变量序列 $\xi_n(\omega)$ 分布收敛于 $\xi(\omega)$，则问题（1）的逼近问题为

$$\min Ef(x,\ \xi_n(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} Eg(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0 \\ x \in D \end{cases} \tag{2}$$

问题（2）的最优值、最优解集、ε-最优解集分别记为 Z_n、M_n、M_n^{ε}，则

$$Z_n = \min\left\{Ef(x,\ \xi_n(\omega)) : Eg(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ x \in D\right\}$$

$$M_n = \min\left\{x \in D \subset R^N : Eg(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant Z_n\right\}$$

$$M_n^{\varepsilon} = \min\left\{x \in D \subset R^N : Eg(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant Z_n + \varepsilon\right\}$$

$\mathscr{B}(R^m)$表示R^m中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(R^m)$表示定义在$\mathscr{B}(R^m)$上的概率测度全体，**N** 表示全体自然数组成的集合. 设$\mu_0 = P \circ \xi^{-1}$，$\mu_n = P \circ \xi_n^{-1}$，则$\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$为$\mathscr{P}(R^m)$中的概率测度族. 于是问题（1）和问题（2）分别等价于下列确定性无约束规划问题（3）和问题（4）

$$\min\left[\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) + \delta_{S_n}(x)\right] \tag{3}$$

和

$$\min\left[\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(x)\right] \tag{4}$$

其中

$$S_0 = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g_i(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d,\ x \in D\right\}$$

$$S_n = \left\{x \in R^N : \int_{R^m} g_i(x,\ u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ d,\ x \in D\right\}$$

问题（3）和问题（4）的最优值、最优解集、ε-最优解集分别记为$\widehat{Z_0}$、$\widehat{M_0}$、$\widehat{M_0^{\varepsilon}}$和$\widehat{Z_n}$、$\widehat{M_n}$、$\widehat{M_n^{\varepsilon}}$，则有

$$Z_0 = \widehat{Z_0}、\quad M_0 = \widehat{M_0}、\quad M_0^{\varepsilon} = \widehat{M_0^{\varepsilon}}$$

和

$$Z_n = \widehat{Z_n}、\quad M_n = \widehat{M_n}、\quad M_n^{\varepsilon} = \widehat{M_n^{\varepsilon}}$$

其中

$$\widehat{M_0^{\varepsilon}} = \left\{x \in S_0 : \int_{R^m} f(x,u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant \widehat{Z_0} + \varepsilon\right\} \tag{5}$$

$$\widehat{M_n^{\varepsilon}} = \left\{x \in S_n : \int_{R^m} f(x,u)\mu_n(\mathrm{d}u) \leqslant \widehat{Z_n} + \varepsilon\right\} \tag{6}$$

由于随机变量序列$\{\xi_n(\omega)\}$分布收敛于$\xi(\omega)$等价于概率测度族μ_n弱收敛于μ_0，因此，当随机变量序列$\xi_n(\omega)$分布收敛于$\xi(\omega)$时，研究M_n^{ε} Hausdorff 收敛于M_0^{ε}的问题等价转化为当概率测度族μ_n弱收

敛于 μ_0 时，讨论 $\widehat{M_n^{\varepsilon}}$ Hausdorff 收敛于 $\widehat{M_0^{\varepsilon}}$ 的问题.

6.1.1 期望模型最优值的收敛性

定理 6.1 若设 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上下半连续且有界，对每个固定的 x，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）关于 u 上半连续，S_0 为正则的，而且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_0$$

证明 由 D 的紧致性及 $\widehat{M_n} \cap D = \widehat{M_n} \neq \varnothing$. 由定理 5.3 及文献[124]定理 7，有

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{Z_n} = \widehat{Z_0} \tag{7}$$

注意到 $Z_0 = \widehat{Z_0}$，$Z_n = \widehat{Z_n}$，故

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_0$$

6.1.2 期望模型 ε-最优解集的 Hausdorff 收敛性

设 R^N 为 N 维欧氏空间，集合 $A \subset R^N$ 到集合 $B \subset R^N$ 的 Hausdorff 距离定义为

$$d_H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}$$

这里 $e(A, B) = \sup_{y\in A} d(y, B)$. 其中

$$d(x, C) = \begin{cases} \inf\{\|x-y\| : y \in C\}, & \text{当} C \neq \varnothing \text{时} \\ +\infty, & \text{当} C = \varnothing \text{时} \end{cases}$$

定义 6.1 称集合序列 $\{S_n\}$ Hausdorff 收敛于 S_0 是指

$$\lim_{n\to\infty} d_H(S_n, S_0) = 0$$

定义 6.2 对固定的 $\varepsilon>0$，称 ε-最优解集 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 为正则的是指

$$\widehat{M_0^\varepsilon} = \mathrm{cl}\{[\widehat{M_0^\varepsilon}]^\circ\}$$

这里 cl 表示集合的闭包，其中

$$[\widehat{M_0^\varepsilon}]^\circ = \left\{x \in S_0 : \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) < \widehat{Z_0} + \varepsilon\right\}$$

定理 6.2 若设 $f(x,u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上下半连续且有界，对每个固定的 u，$g_i(x, u)$ 关于 u 上半连续，S_0 和 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 为正则的，且 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$，则问题（4）的 ε-最优解集序列 $\widehat{M_n^\varepsilon}$ Hausdorff 收敛于问题（3）的 ε-最优解集 $\widehat{M_0^\varepsilon}$.

证明 由定理 5.2 的证明过程可知，存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，$\widehat{M_n} \neq \varnothing$ 且 $\widehat{M_0} \neq \varnothing$. 注意到 $\widehat{M_n} \subset \widehat{M_n^\varepsilon}$ 且 $\widehat{M_0} \subset \widehat{M_0^\varepsilon}$，于是存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，$\widehat{M_n^\varepsilon} \neq \varnothing$ 且 $\widehat{M_0^\varepsilon} \neq \varnothing$. 为了证明

$$\lim_{n\to\infty} d_H(\widehat{M_n^\varepsilon}, \widehat{M_0^\varepsilon}) = 0$$

只需证明

$$\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_n^\varepsilon}, \widehat{M_0^\varepsilon}) = 0 \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_0^\varepsilon}, \widehat{M_n^\varepsilon}) = 0$$

首先证明 $\lim\limits_{n\to\infty} e(\widehat{M_n^\varepsilon}, \widehat{M_0^\varepsilon}) = 0$. 即需证明：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$\widehat{M_n^\varepsilon} \subset \widehat{M_0^\varepsilon} + B_\varepsilon(0)$$

下面我们证明：对任意包含 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 的开集 V，存在 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$\widehat{M_n^\varepsilon} \subset V$$

反设此结论不成立，则存在$\{x_{n_k}\}$，使得$x_{n_k} \in \widehat{M_{n_k}^{\varepsilon}}$，但$x_{n_k} \notin V$. 注意到$\widehat{M_{n_k}^{\varepsilon}} \subset D$及$D$的紧致性，则$\{x_{n_k}\}$必存在聚点$x_0$. 又由于$V$为开集，故$x_0 \notin V$. 另一方面，注意到（5～7）式，由定理 5.3 及定理 5.3（2），有

$$\limsup_{n\to\infty} \widehat{M_n^{\varepsilon}} \subset \widehat{M_0^{\varepsilon}}$$

故$x_0 \in \widehat{M_0^{\varepsilon}}$，这与$\widehat{M_0^{\varepsilon}} \subset V$矛盾. 特别地，取$V = \widehat{M_0^{\varepsilon}} + B_{\varepsilon}(0)$.

其次证明$\lim\limits_{n\to\infty} e(\widehat{M_0^{\varepsilon}}, \widehat{M_n^{\varepsilon}}) = 0$. 即需证明：对任意的$\varepsilon > 0$，存在$n_0$，当$n \geqslant n_0$时，有

$$\widehat{M_0^{\varepsilon}} \subset \widehat{M_n^{\varepsilon}} + B_{\varepsilon}(0)$$

也即需证明：对任意的$x_0 \in \widehat{M_0^{\varepsilon}}$，存在$\{x_n\}$且$x_n \to x_0$，使得当$n \geqslant n_0$时，有

$$x_n \in \widehat{M_n^{\varepsilon}}$$

设$x_0 \in \widehat{M_0^{\varepsilon}}$，由$\widehat{M_0^{\varepsilon}}$的正则性，则存在$\{y_n\}$且$y_n \to x_0$，使得$y_n \in [\widehat{M_0^{\varepsilon}}]^{\circ}$，即

$$y_n \in S_0 \quad \text{且} \quad \int_{R^m} f(y_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) < \widehat{Z_0} + \varepsilon$$

故

$$\int_{R^m} f(y_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(y_n) < \widehat{Z_0} + \varepsilon$$

由定理 5.3 及（7）式，我们有

$$\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u) + \delta_{S_n}(x) - \widehat{Z_n} - \varepsilon\right]$$
$$\xrightarrow{\text{epi}} \left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(x) - \widehat{Z_0} - \varepsilon\right]$$

对每个固定的y_n，令$\delta = \widehat{Z_0} + \varepsilon - \int_{R^m} f(y_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) - \delta_{S_0}(y_n)$，则$\delta > 0$. 取$\gamma$，使得$0 < \gamma < \delta$，由定义 6.2 可知，存在$\{y_{n,k}\}$且$y_{n,k} \to y_n$，使

得当$k \geqslant N_n$时，有

$$\int_{R^m} f(y_{n,k}, u)\mu_k(\mathrm{d}u) + \delta_{S_k}(y_{n,k}) - \widehat{Z_k} - \varepsilon$$
$$\leqslant \int_{R^m} f(y_n, u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(y_n) - \widehat{Z_0} - \varepsilon + \gamma \leqslant 0$$

于是

$$\int_{R^m} f(y_{n,k}, u)\mu_k(\mathrm{d}u) + \delta_{S_k}(y_{n,k}) \leqslant \widehat{Z_k} + \varepsilon$$

注意到$\widehat{Z_k}$是有限的，则

$$y_{n,k} \in S_k \quad 且 \quad \int_{R^m} f(y_{n,k}, u)\mu_k(\mathrm{d}u) \leqslant \widehat{Z_k} + \varepsilon$$

故$y_{n,k} \in \widehat{M_k^{\varepsilon}}$. 即对每个$y_n$，存在$N_n$，当$k \geqslant N_n$时，有

$$y_{n,k} \in \widehat{M_k^{\varepsilon}}$$

构造下列序列$\{x_n\}$：

$$x_n = \begin{cases} 任意, & n < N_1 \\ y_{1,n}, & N_1 \leqslant n < \max\{N_1, N_2\} + 1 \\ y_{2,n}, & \max\{N_1, N_2\} + 1 \leqslant n < \max\{N_1, N_2, N_3\} + 2 \\ y_{3,n}, & \max\{N_1, N_2, N_3\} + 2 \leqslant n < \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\} + 3 \\ \vdots \end{cases}$$

由序列$\{x_n\}$的构造，对所有的$n \geqslant N_0 := N_1$，有$x_n \in \widehat{M_n^{\varepsilon}}$又由$y_n \to x_0$，则有$x_n \to x_0$. 这就完成了证明.

推论 1　假设$f(x,u)$在$R^N \times R^m$上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在$R^N \times R^m$上下半连续且有界，对每个固定的x，$g_i(x, u)$关于u上半连续，$\widetilde{S_0} = \mathrm{cl}(\widetilde{S_0}^{\circ})$，且$\widetilde{S_0}^{\circ} \neq \varnothing$，$\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$及$M_0^{\varepsilon} = \mathrm{cl}\{[M_0^{\varepsilon}]^{\circ}\}$，则问题（2）的$\varepsilon$-最优解集序列$M_n^{\varepsilon}$ Hausdorff收敛于问题（1）的ε-最优解集M_0^{ε}，其中

$$\widetilde{S_0} = \left\{x \in R^N : Eg_i(x, \xi(\omega)) \leqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, d,\ x \in D\right\}$$

$$\widetilde{S_0}^{\circ}=\left\{x\in R^N: Eg_i(x,\ \xi(\omega))<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d,\ x\in D\right\}$$

$$[M_0^{\varepsilon}]^{\circ}=\left\{x\in D\subset R^N: Eg(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi(\omega))<Z_0+\varepsilon\right\}$$

证明 易知 $S_0=\widetilde{S_0}$，$S_0^{\circ}=[\widetilde{S_0}]^{\circ}$，则 $\widetilde{S_0}=\mathrm{cl}(\widetilde{S_0}^{\circ})$，且 $\widetilde{S_0}^{\circ}\neq\varnothing$ 等价于 S_0 的正则性. 同理易知 $M_0^{\varepsilon}=\widehat{M_0^{\varepsilon}}$，则 $[M_0^{\varepsilon}]^{\circ}=[\widehat{M_0^{\varepsilon}}]^{\circ}$ 等价于 $\widehat{M_0^{\varepsilon}}$ 的正则性. 又 $\xi_n(\omega)\xrightarrow{d}\xi(\omega)$ 等价于 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$，再注意到 $M_n^{\varepsilon}=\widehat{M_n^{\varepsilon}}$，由定理 6.2 知推论 1 成立.

6.2 概率约束规划模型逼近 ε- 最优解集的 Hausdorff 收敛性

概率约束规划模型作为随机规划期望模型的特殊情形，我们在第 5 章的第 2 节利用上图收敛性给出了概率约束规划逼近最优解集上半收敛的一个充分条件，但对逼近 ε-最优解集的 Hausdorff 收敛性尚未研究.

本节给出了概率约束规划逼近 ε-最优解集的 Hausdorff 收敛性条件，得到了概率约束规划逼近 ε-最优解集 Hausdorff 收敛的一个充分条件.

考虑如下的随机规划问题：

$$\min Ef(x,\ \xi(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}P[g_i(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d\ ]\geqslant\alpha\\ x\in D\end{cases}\tag{8}$$

其中，$x=(x_1,x_2,\ \cdots,x_N)^{\mathrm{T}}\in R^N$，$\xi(\omega)$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的 m 维连续型随机向量，紧集 $D\subset R^N$ 是所有的确定约束集，$f:R^N\times R^m\to R$，$g:R^N\times R^m\to R^d$，E 表示随机变量函数的期望泛函. Z_0、M_0、M_0^{ε} 分别表示问题（8）的最优值、最优解集、ε-最优解集，即

$$Z_0 = \min\left\{Ef(x,\ \xi(\omega)) : P[g_i(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d\ ] \geqslant \alpha,\ x \in D\right\}$$

$$M_0 = \left\{x \in D \subset R^N : P[g_i(x,\xi(\omega)) \leqslant 0, i=1,2,\cdots,d\ ] \geqslant \alpha, Ef(x,\xi(\omega)) \leqslant Z_0\right\}$$

$$M_0^{\ \varepsilon} = \left\{x \in D \subset R^N : P[g_i(x,\xi(\omega)) \leqslant 0, i=1,2,\cdots,d\ ] \geqslant \alpha, Ef(x,\xi(\omega)) \leqslant Z_0 + \varepsilon\right\}$$

设 $\xi_n(\omega)$ 为 $\xi(\omega)$ 的离散化随机变量序列，且随机变量序列 $\xi_n(\omega)$ 分布收敛于 $\xi(\omega)$，则问题（2）的逼近问题为

$$\begin{aligned}&\min Ef(x,\ \xi_n(\omega))\\ &\text{s.t.}\begin{cases}P[g_i(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d\ ] \geqslant \alpha\\ x \in D\end{cases}\end{aligned} \tag{9}$$

问题（9）的最优值、最优解集、ε-最优解集分别记为 Z_n、M_n、$M_n^{\ \varepsilon}$,则

$$Z_n = \min\left\{Ef(x,\xi_n(\omega)) : P[g_i(x,\xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,d] \geqslant \alpha, x \in D\right\}$$

$$M_n = \left\{x \in D \subset R^N : P[g_i(x,\xi_n(\omega)) \leqslant 0, i=1,2,\cdots,d] \geqslant \alpha, Ef(x,\xi_n(\omega)) \leqslant Z_n\right\}$$

$$M_n^{\ \varepsilon} = \left\{x \in D \subset R^N : P[g_i(x,\xi_n(\omega)) \leqslant 0, i=1,2,\cdots,d] \geqslant \alpha, Ef(x,\xi_n(\omega)) \leqslant Z_n + \varepsilon\right\}$$

$\mathscr{B}(R^m)$ 表示 R^m 中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(R^m)$ 表示定义在 $\mathscr{B}(R^m)$ 上的概率测度全体，$\mathbf{N}$ 表示全体自然数组成的集合. 设 $\mu_0 = P \circ \xi^{-1}$，$\mu_n = P \circ \xi_n^{\ -1}$，则 $\{\mu_0;\ \mu_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathscr{P}(R^m)$ 中的概率测度族. 记

$$H(x) := \left\{u \in R^m : g_i(x,\ u) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d\right\}$$

则

$$P[g_i(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d] = P\left\{\xi(\omega) \in H(x)\right\} = \mu_0(H(x))$$

$$P[g_i(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d] = P\left\{\xi_n(\omega) \in H(x)\right\} = \mu_n(H(x))$$

于是问题（8）和问题（9）分别等价于下列确定性无约束规划问题（10）和问题（11）

$$\min\left[\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(x)\right] \tag{10}$$

和

$$\min\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u)+\delta_{S_n}(x)\right] \tag{11}$$

其中

$$S_0=\left\{x\in R^N: \mu_0(H(x))\geqslant\alpha,\ x\in D\right\}$$

$$S_n=\left\{x\in R^N: \mu_n(H(x))\geqslant\alpha,\ x\in D\right\}$$

这里

$$\delta_S(x)=\begin{cases}0, & x\in S\\ +\infty, & x\notin S\end{cases}$$

问题（10）和问题（11）的最优值、最优解集、ε-最优解集分别记为 $\widehat{Z_0}$、$\widehat{M}_0$、$\widehat{M_0^{\varepsilon}}$ 和 $\widehat{Z_n}$、$\widehat{M}_n$、$\widehat{M_n^{\varepsilon}}$，则

$$Z_0=\widehat{Z_0}、\quad M_0=\widehat{M}_0、\quad M_0^{\varepsilon}=\widehat{M_0^{\varepsilon}}$$

和

$$Z_n=\widehat{Z_n}、\quad M_n=\widehat{M_n}、\quad M_n^{\varepsilon}=\widehat{M_n^{\varepsilon}}$$

其中

$$\widehat{M_0^{\varepsilon}}=\left\{x\in S_0: \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)\leqslant\widehat{Z_0}+\varepsilon\right\} \tag{12}$$

$$\widehat{M_n^{\varepsilon}}=\left\{x\in S_n: \int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\mathrm{d}u)\leqslant\widehat{Z_n}+\varepsilon\right\} \tag{13}$$

由于随机变量序列 $\{\xi_n(\omega)\}$ 分布收敛于 $\xi(\omega)$ 等价于概率测度族 μ_n 弱收敛于 μ_0，因此，当随机变量序列 $\xi_n(\omega)$ 分布收敛于 $\xi(\omega)$ 时，研究 M_n^{ε} Hausdorff 收敛于 M_0^{ε} 的问题等价转化为当概率测度族 μ_n 弱收敛于 μ_0 时，讨论 $\widehat{M_n^{\varepsilon}}$ Hausdorff 收敛于 $\widehat{M_0^{\varepsilon}}$ 的问题.

6.2.1 概率约束规划模型最优值的收敛性

定理 6.3 若设 $f(x, u)$ 在 $R^N\times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）在 $R^N\times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$\mu_0(E(x)) = 0$；

（3）可行集 S_0 为正则的，

则

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = Z_0$$

证明　完全类似于定理 6.1 的证明.

6.2.2　概率约束规划模型 ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性

定义 6.3　对固定的 $\varepsilon > 0$，称 ε-最优解集 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 为正则的是指

$$\widehat{M_0^\varepsilon} = \mathrm{cl}\{[\widehat{M_0^\varepsilon}]^\circ\}$$

这里 cl 表示集合的闭包，其中

$$[\widehat{M_0^\varepsilon}]^\circ = \left\{x \in S_0 : \int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u) < \widehat{Z_0} + \varepsilon\right\}$$

定理 6.4　若设 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续且有界，$g_i(x, u)$（$i = 1, 2, \cdots, d$）在 $R^N \times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$\mu_0(E(x)) = 0$；

（3）可行集 S_0 及 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 为正则的，

则问题（11）的 ε－最优解集序列 $\widehat{M_n^\varepsilon}$ Hausdorff 收敛于问题（10）的 ε-最优解集 $\widehat{M_0^\varepsilon}$.

证明　完全类似于定理 6.2 的证明.

推论 2　若设 $f(x, u)$ 在 $R^N \times R^m$ 连续且有界，$g_i(x, u)$ $(i=1, 2, \cdots, d)$ 在 $R^N \times R^m$ 上连续，且满足：

（1）$\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$；

（2）对每个固定的 $x \in R^N$，$P(\xi(\omega) \in E(x)) = 0$；

（3）$\widetilde{S_0} = \mathrm{cl}[\widetilde{S_0}]^\circ$ 及 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 为正则的，

则问题（9）的 ε-最优解集序列 M_n^{ε} Hausdorff 收敛于问题（8）的 ε-最优解集 M_0^{ε}. 其中

$$\widetilde{S_0}=\left\{x\in R^N: P[g_i(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d]\geqslant\alpha,\ x\in D\right\}$$

$$\widetilde{S_0^{\circ}}=\left\{x\in R^N: P[g_i(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ d]>\alpha,\ x\in D\right\}$$

证明 完全类似于推论 1 的证明.

6.3 经验逼近模型 ε-最优解集的几乎处处 Hausdorff 收敛性

我们在第 5 章的第 3 节利用上图收敛性给出了经验逼近模型最优解集上半收敛的一个充分条件，但对 ε-逼近最优解集的 Hausdorff 收敛性尚未研究. 本节给出了经验逼近模型 ε-最优解集的 Hausdorff 收敛性条件，得到了经验逼近模型 ε-最优解集 Hausdorff 收敛的一个充分条件.

考虑下列随机规划问题:

$$\begin{aligned}&\min Ef(x,\ \xi(\omega))\\&\text{s.t.}\begin{cases}Eg(x,\ \xi(\omega))\leqslant 0\\ x\in D\end{cases}\end{aligned}\tag{14}$$

其中，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}}\in R^N$，$\xi(\omega)$为定义在概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的 m 维连续型随机向量，紧集 $D\subset R^N$ 是所有的确定约束集，$f: R^N\times R^m\to R$，$g: R^N\times R^m\to R^d$，E 表示随机变量函数的期望泛函.

$\mathscr{B}(R^m)$表示 R^m 中的 Borel 子集全体，$\mathscr{P}(R^m)$表示定义在$\mathscr{B}(R^m)$上的概率测度全体，N 表示全体自然数组成的集合. 设 $\mu_0=P\circ\xi^{-1}$，则 μ_0 为 $\mathscr{P}(R^m)$中的概率测度. 于是第 5 章的问题（24）可改写为

$$\min \int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\int_{R^m} g(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) \leqslant 0 \\ x \in D\end{cases} \tag{15}$$

问题（15）的最优值、最优解集 ε-最优解集分别记为 Z_0、M_0、M_0^{ε}，即

$$Z_0 = \min\{Ef(x,\ \xi(\omega)) : Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ x \in D\}$$

$$M_0 = \{x \in D \subset R^N : Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi(\omega)) \leqslant Z_0\}$$

$$M_0^{\varepsilon} = \{x \in D \subset R^N : Eg(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0,\ Ef(x,\ \xi(\omega)) \leqslant Z_0 + \varepsilon\}$$

用经验概率测度 $\mu_n(\omega,\cdot)$ 替代问题(15)中的 $\mu_0(\cdot)$，这样得到问题(15)的经验逼近模型

$$\min \int_{R^m} f(x,\ u)\mu_n(\omega,\ \mathrm{d}u)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\int_{R^m} g(x,\ u)\mu_n(\omega,\ \mathrm{d}u) \leqslant 0 \\ x \in D\end{cases} \tag{16}$$

问题(16)的最优值、最优解集、ε-最优解集分别记为 $Z_n(\omega)$、$M_n(\omega)$、$M_n^{\varepsilon}(\omega)$. 即

$$Z_n(\omega) = \min\left\{\int_{R^m} f(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u) : \int_{R^m} g(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u), x \in D\right\}$$

$$M_n(\omega) = \left\{x \in D \subset R^N : \int_{R^m} g(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u) \leqslant 0, \int_{R^m} f(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u) \leqslant Z_0\right\}$$

$$M_n^{\varepsilon}(\omega) = \left\{x \in D \subset R^N : \int_{R^m} g(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u) \leqslant 0, \int_{R^m} f(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u) \leqslant Z_0 + \varepsilon\right\}$$

问题（15）和问题（16）又可以分别等价地转化为下列问题（17）和问题（18）

$$\min\left[\int_{R^m} f(x,\ u)\mu_0(\mathrm{d}u) + \delta_{S_0}(x)\right] \tag{17}$$

和

$$\min\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x)\right] \tag{18}$$

这里

$$\delta_S(x)=\begin{cases}0, & x\in S\\ +\infty, & x\notin S\end{cases}$$

问题（17）和问题（18）的最优值、最优解集、ε-最优解集分别记为 $\widehat{Z_0}$、$\widehat{M_0}$、$\widehat{M_0^\varepsilon}$ 和 $\widehat{Z_n}(\omega)$、$\widehat{M_n}(\omega)$、$\widehat{M_n^\varepsilon}(\omega)$，则有

$$Z_0=\widehat{Z_0}, \quad M_0=\widehat{M_0}, \quad M_n(\omega)=\widehat{M}_n(\omega)$$

因此，研究随机规划（16）的ε-最优解集序列 $M_n(\omega)$ 几乎处处 Hausdorff 收敛于随机规划（15）的最优解集 M_0 的问题等价转化为研究无约束规划（18）的ε-最优解集序列 $\widehat{M_n^\varepsilon}(\omega)$ 几乎处处 Hausdorff 收敛于无约束规划（17）的最优解集 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 的问题.

6.3.1 经验逼近最优值的几乎处处收敛性

定理 6.5 若（1）$f(x,u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 连续，且存在关于 μ_0 可积的函数 $\beta(u)$，使得 $|f(x, u)|\leqslant\beta(u)$；

（2）$g_i(x, u)$（$i=1, 2, \cdots, d$）关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 下半连续，存在关于 μ_0 可积的函数 $\gamma(u)$，使得 $g_i(x, u)\geqslant\gamma(u)$，$i=1, 2, \cdots, d$，且 S_0 为正则的，

则

$$\widehat{Z_n}(\omega)\xrightarrow{\text{a.s.}}\widehat{Z_0}$$

证明 由定理 5.12 有

$$\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_n(\omega, \mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x)\right]$$

$$\xrightarrow{\text{epi}}\left[\int_{R^m} f(x, u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x)\right] \quad \text{a.s}$$

则存在零测集 $N_1 \subset \Omega$，使得对任意固定的 $\omega \in \Omega \setminus N_1$，有

$$\left[\int_{R^m} f(x,u)\mu_n(\omega,\mathrm{d}u)+\delta_{S_n(\omega)}(x)\right] \xrightarrow{\text{epi}} \left[\int_{R^m} f(x,u)\mu_0(\mathrm{d}u)+\delta_{S_0}(x)\right]$$

其余类似于定理 6.1 的证明.

6.3.2 经验逼近 ε-最优解集的几乎处处 Hausdorff 收敛性

定义 6.4 称随机集合序列 $\{S_n(\omega); n \in \mathbf{N}\}$ Hausdorff 收敛于 S_0，是指存在零测集 $N \subset \Omega$，使得对任意固定的 $\omega \in \Omega \setminus N$，有

$$\lim_{n\to\infty} d_H(S_n(\omega), S_0)=0$$

定理 6.6 如果满足下列两个条件：

(1) $f(x,u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 连续，且存在关于 μ_0 可积的函数 $\beta(u)$，使得 $|f(x,u)| \leqslant \beta(u)$；

(2) $g_i(x,u)$ （$i=1,2,\cdots,d$）关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 下半连续，存在关于 μ_0 可积的函数 $\gamma(u)$，使得 $g_i(x,u) \geqslant \gamma(u)$，且 S_0 和 $\widehat{M_0^{\varepsilon}}$ 为正则的，
则

$$\lim_{n\to\infty} d_H(\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega), \widehat{M_0^{\varepsilon}})=0, \quad \text{a. s}$$

证明 由定理 5.13 可知，

$$\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega), \widehat{M_0^{\varepsilon}})=0, \quad \text{a.s}$$

为了证明

$$\lim_{n\to\infty} d_H(\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega), \widehat{M_0^{\varepsilon}})=0, \quad \text{a. s}$$

只需证明

$$\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_0^\varepsilon}, \widehat{M_n^\varepsilon}(\omega))=0 \text{ , a. s}$$

即需证明：存在零测集 $N\subset\Omega$，使得当 $\omega\in\Omega\backslash N$ 时，对任意的 $\varepsilon_0>0$，存在 N_0，当 $n\geqslant N_0$ 时，有

$$\widehat{M_0^\varepsilon}\subset\widehat{M_n^\varepsilon}(\omega)+B_{\varepsilon_0}(0)$$

也即需证明：存在零测集 $N\subset\Omega$，使得当 $\omega\in\Omega\backslash N$ 时，对任意的 $x_0\in\widehat{M_0^\varepsilon}$，存在 $\{x_n\}$ 且 $x_n\to x_0$，使得当 $n\geqslant N_0$ 时，有

$$x_n\in\widehat{M_0^\varepsilon}(\omega)$$

其余类似于定理 6.2 的证明.

推论 3 如果满足下列两个条件：

（1） $f(x, u)$ 关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 连续，且存在关于 μ_0 可积的函数 $\beta(u)$，使得 $|f(x, u)|\leqslant\beta(u)$；

（2） $g_i(x, u)$ （$i=1, 2, \cdots, d$）关于 $\mathscr{B}(R^N)\times\mathscr{B}(R^m)$ 可测，对任意固定的 u 关于 x 下半连续，存在关于 μ_0 可积的函数 $\gamma(u)$，使得 $g_i(x, u)\geqslant\gamma(u)$，且 S_0 和 $\widehat{M_0^\varepsilon}$ 为正则的，

则

$$\lim_{n\to\infty} d_H(M_n^\varepsilon(\omega), M_0^\varepsilon)=0 \text{ , a. s}$$

证明 注意到 $M_0=\widehat{M_0}$ 且 $M_n(\omega)=\widehat{M}_n(\omega)$，由定理 6.6 可知推论 3 成立.

6.4 随机规划逼近问题ε-最优解集的稳定性分析

6.4.1 引 言

最优解集集值映射的连续性是非线性参数规划的重要特性之

一，它在随机规划逼近问题最优解集的稳定性（如分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛）的研究中起着非常重要的作用. 然而，非线性参数规划问题的最优解集集值映射通常只具有上半收敛性，而不具有下半收敛性. 因此一些学者转向研究ε-最优解集集值映射的连续性. 但是，目前研究非线性参数规划问题ε-最优解集集值映射连续性的文献甚少，而已有的一些文献主要针对非线性参数规划问题最优值函数的各种凸性进行了研究，因此，对非线性参数规划问题ε-最优解集集值映射连续性的研究是一件很有意义的工作.

本节首先在可行集集值映射局部有界且正则的条件下，讨论了非线性参数规划问题最优值函数的连续性，然后针对ε-最优解集集值映射的结构特征并利用此结果和集值分析理论，给出了非线性参数规划问题ε-最优解集集值映射连续的一个充分条件. 其次，在集值理论框架下，讨论随机规划逼近问题ε-最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

考虑下列随机规划问题：

$$\min f(x,\ \xi(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x,\ \xi(\omega)) \leqslant 0 \\ i \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ d\} \end{cases} \tag{19}$$

和问题（19）的逼近问题：

$$\min f(x,\ \xi_n(\omega))$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x,\ \xi_n(\omega)) \leqslant 0 \\ i \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ d\} \end{cases} \tag{20}$$

其中，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)^{\mathrm{T}} \in R^N$是$N$维欧氏空间$R^N$中的实值向量，$\xi(\omega)$、$\xi_n(\omega)$为定义在完备概率空间$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$上的$m$维随机向量. $f: R^N \times R^m \to R$，$g_i: R^N \times R^m \to R$. $i \in I = \{1,2,\cdots,d\}$. 问题（19）和问题（20）的$\varepsilon$-最优解集分别记为$M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$和$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))$.

本节讨论当$\xi_n(\omega)$分别依分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛于

$\xi(\omega)$时，问题（20）的ε-最优解集集值随机变量序列$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))$分别依分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛到问题（19）的ε-最优解集$M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$的特性.

6.4.2 非线性参数规划问题ε-最优解集集值映射的连续性

首先考虑如下非线性参数规划问题：

$$\min f(x, u)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(x, u) \leqslant 0 \\ i \in I = \{1, 2, \cdots, d\} \end{cases} \tag{21}$$

的ε-最优解集集值映射的连续性.

参数非线性规划问题（21）的最优值函数定义为

$$z(u) = \min\left\{f(x, u) \middle| x \in J(u)\right\} \tag{22}$$

ε-最优解集集值映射定义为

$$M^{\varepsilon}(u) = \left\{x \in R^n : x \in J(u), f(x, u) \leqslant z(u) + \varepsilon\right\} \tag{23}$$

其中可行解集集值映射

$$J(u) = \left\{x \in R^n : g_i(x, u) \leqslant 0,\ i \in \{1, 2, \cdots, d\}\right\} \tag{24}$$

定义 6.5 称函数$f: R^N \times R^m \to \overline{R}$在$x \in R^N \times R^m$处下半连续，如果存在$\varepsilon_x > 0$使得对任意的$\varepsilon \in (0, \varepsilon_x)$，存在$x$的邻域$V(x)$满足

$$\inf_{y \in V(x)} f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon$$

称函数$f(x)$在$R^N \times R^m$上下半连续，如果$f(x)$在$R^N \times R^m$中每一点处下半连续；称函数$f(x)$在$x \in R^N \times R^m$处上半连续，如果$-f(x)$在x处

下半连续；称函数 $f(x)$ 在 $R^N\times R^m$ 上上半连续，如果 $f(x)$ 在 $R^N\times R^m$ 上下半连续；称函数 $f(x)$ 在 $R^N\times R^m$ 上连续，如果 $f(x)$ 在 $R^N\times R^m$ 上既上半连续又下半连续.

定义 6.6 称集值映射 $J:R^m\to 2^{R^N}$ 为局部有界，若对任意固定的 $u\in R^m$，存在 u 的邻域 $V(u)$，使得 $\bigcup\limits_{v\in V(u)} J(v)$ 是非空有界集.

定义 6.7 称集值映射 $J:R^m\to 2^{R^N}$ 为正则的，若对任意的 $u\in R^m$，有

$$\mathrm{cl}J^{*}(u)=J(u)$$

这里 cl 表示集合的闭包，其中

$$J^{*}(u)=\left\{x\in R^n: g_i(x,\ u)<0,\ i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ d\}\right\}$$

引理 1 （1）若函数 $f(x,u)$、$g_i(x,u)(i\in I)$ 关于 (x,u) 下半连续，且集值映射 J 为局部有界，则函数 $z(u)$ 下半连续.

（2）若函数 $f(x,u)$ 对固定的 x 关于 u 上半连续，对固定的 u 关于 x 连续；函数 $g_i(x,u)(i\in I)$ 对固定的 x 关于 u 上半连续，对固定的 u 关于 x 下半连续，且集值映射 J 为正则的，则函数 $z(u)$ 上半连续.

证明 注意到定义 6.5 与定义 5.10 是等价的，结合定义 6.6、定义 6.7 与第 5 章的引理 1 易得.（详细证明可参见文献[108]）

引理 2 若函数 $f(x,u)$ 关于 (x,u) 连续，函数 $g_i(x,u)(i\in I)$ 关于 (x,u) 下半连续，集值映射 J 局部有界，则集值映射 $\Gamma^{\circ}(u)$ 强下半连续. 其中

$$\Gamma(u)=\{x\in R^N: f(x,\ u)-z(u)-\varepsilon\leqslant 0\}$$

$$\Gamma^{*}(u)=\{x\in R^N: f(x,\ u)-z(u)-\varepsilon<0\}$$

证明 设 $x_0\in\Gamma^{*}(u_0)$，即 $f(x_0,u_0)-z(u_0)-\varepsilon<0$，由引理 1（1）可知，最优值函数 $z(u)$ 关于 u 下半连续，故 $-z(u)$ 关于 u 上半连续，从而 $-z(u)$ 关于 (x,u) 上半连续. 又函数 $f(x,u)$ 关于 (x,u) 连续，则

函数 $f(x, u)$ 关于 (x, u) 上半连续，故 $f(x_0, u_0)-z(u_0)-\varepsilon$ 关于 (x, u) 上半连续. 由定义 5.10 可知，$\{(x, u): f(x, u)-z(u)-\varepsilon<0\}$ 为包含点 (x_0, u_0) 的开集，则存在 (x_0, u_0) 的邻域 $N(x_0)\times V(u_0)$（这里 $N(x_0)$ 为 x_0 的邻域，$V(u_0)$ 为 u_0 的邻域）使得

$$N(x_0)\times V(u_0)\subset\{(x, u): f(x, u)-z(u)-\varepsilon<0\}$$

于是当 $(x, u)\in N(x_0)\times V(u_0)$ 时，有

$$f(x, u)-z(u)-\varepsilon<0$$

故当 $u\in V(u_0)$ 时，有

$$N(x_0)\subset\Gamma^{\circ}(u_0)$$

引理 3 设函数 $f(x, u)$ 及 $g_i(x, u)(i\in I)$ 关于 (x, u) 下半连续，对固定的 x 关于 u 上半连续，且集值映射 J 为局部有界，那么:

（1）函数 $f(x, u)$ 对固定的 u 关于 x 上半连续，且集值映射 J 正则，则集值映射 $M^{\varepsilon}(u)$ 是紧值且上半连续.

（2）若对任意的 $\forall u\in R^m$，$\mathrm{cl}\{\Gamma^{\circ}(u)\cap J^{\circ}(u)\}=\Gamma(u)\cap J(u)$，则集值映射 $M^{\varepsilon}(u)$ 是紧值且下半连续.

证明 （1）易知对任意的 $u\in R^m$，$J(u)$ 是紧集. 下面先证明集值映射 $J(u)$ 的上半连续性. 对任意的闭集 A，如果设 $\{u_n\}_{n\geq 1}\subset\{u\in R^m: J(u)\cap A\neq\varnothing\}$ 且 $u_n\to u_0$，则

$$u_n\in\{u\in R^m: J(u)\cap A\neq\varnothing\}$$

即存在 $x_n\in J(u_n)\cap A$. 因此 $x_n\in J(u_n)$ 且 $x_n\in A$. 注意到 $J(u)$ 的局部有界性，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}J(u_n)$ 是非空有界集. 而 $\{x_n\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}J(u_n)$，因而存在 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x_0$. 故 $(x_{n_k}, u_{n_k})\to(x_0, u_0)$ 且 $x_0\in A$. 又由函数 $g_i(x, u)(i\in I)$ 在 (x_0,u_0) 处的下半连续性及 $x_{n_k}\in J(u_{n_k})$，故对每个 $i\in I$，均有 $g_i(x_0, u_0)\leqslant 0$. 因此

$$x_0 \in J(u_0) \cap A$$

故

$$u_0 \in \left\{u \in R^m : J(u) \cap A \neq \varnothing\right\}$$

即 $\left\{u \in R^m : J(u) \cap A \neq \varnothing\right\}$ 是 R^m 中的闭集.

应用引理 1 及集值映射 $J(u)$ 局部有界性，同理可证集值映射 $\Gamma(u)$ 为闭值且上半连续. 因为

$$M^\varepsilon(u) = \Gamma(u) \cap J(u) \tag{25}$$

注意到 $M^\varepsilon(u) \neq \varnothing$，由文献[123]命题 1.3.16 可知，集值映射 $M^\varepsilon(u)$ 为紧值且上半连续.

（2）对任意的开集 $O \subset R^N$，设 $u_0 \in \left\{u \in R^m : J(u) \cap O \neq \varnothing\right\}$，即 $J(u_0) \cap O \neq \varnothing$，由于函数 $g_i(x,u)(i \in I)$ 关于 (x,u) 下半连续，则 $J(u_0) \cap \Gamma(u_0)$ 是闭集. 于是由 $\mathrm{cl}\{\Gamma^\circ(u_0) \cap J^\circ(u_0)\} = \Gamma(u_0) \cap J(u_0)$ 及文献[81]引理 1.3.3 可知，

$$\Gamma^\circ(u_0) \cap J^\circ(u_0) \cap O \neq \varnothing$$

则存在 $x_0 \in O$ 且 $x_0 \in J^\circ(u_0)$ 和 $x_0 \in \Gamma^\circ(u_0)$. 一方面，若 $x_0 \in J^\circ(u_0)$，即 $g_i(x_0, u_0) < 0$，$i \in I$，又由函数 $g_i(x_0, u)(i \in I)$ 在 u_0 处的上半连续性可知，存在 u_0 的邻域 $V_1(u_0)$，使得当 $u \in V_1(u_0)$ 时，有 $g_i(x_0, u_0) < 0$，$i \in I$，即当 $u \in V_1(u_0)$ 时，有

$$x_0 \in J^\circ(u_0)$$

另一方面，若 $x_0 \in \Gamma^\circ(u_0)$，应用引理 1（1）及 $g_i(x_0, u)(i \in I)$ 在 u_0 处的上半连续性类似可得，存在 u_0 的邻域 $V_2(u_0)$，使得当 $u \in V_2(u_0)$ 时，有

$$x_0 \in \Gamma^\circ(u)$$

令 $V(u_0) = V_1(u_0) \cap V_2(u_0)$，注意到 $x_0 \in O$，从而当 $u \in V(u_0)$ 时，有

$$\varnothing \neq \Gamma^\circ(u) \cap J^\circ(u) \cap O \subset \Gamma(u) \cap J(u) \cap O$$

即

$$V(u_0) \subset \left\{ u \in R^m : \Gamma(u) \cap J(u) \cap O \neq \varnothing \right\}$$

故 $\left\{ u \in R^m : M^{\varepsilon}(u) \cap O \neq \varnothing \right\}$ 是 R^m 中的开集.

推论 4 若函数 $f(x, u)$ 及 $g_i(x, u)(i \in I)$ 关于 (x, u) 连续，集值映射 J 局部有界且正则，且 $\forall u \in R^m$，$\mathrm{cl}\{\Gamma^{\circ}(u) \cap J(u)\} = \Gamma(u) \cap J(u)$，则集值映射 $M^{\varepsilon}(u)$ 连续.

证明 由引理 3（2）易知，集值映射 $M^{\varepsilon}(u)$ 是紧值且上半连续. 下面证明集值映射 $M^{\varepsilon}(u)$ 为紧值且下半连续. 由引理 2 可知，集值映射 $\Gamma^{\circ}(u)$ 是强下半连续的. 再利用集值映射 J 的正则性，类似于引理 3（2）的证明方法可得，集值映射 J 为紧值且下半连续.

注意到 $\mathrm{cl}\{\Gamma^{\circ}(u) \cap J(u)\} = \Gamma(u) \cap J(u)$，由（25）式及文献[3]引理 2.2.5 可知，集值映射 $M^{\varepsilon}(u)$ 为紧值且下半连续.

6.4.3 ε-最优解集稳定性分析

本节讨论了随机规划问题 ε-最优解集集值映射对所含随机变量参数的分布收敛、概率收敛、几乎处处收敛的稳定性.

定理 6.7 若 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{d} \xi(\omega)$，且满足引理 3 的条件，则有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{w} M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

证明 类似于定理 5.14 的证明.

定理 6.8 设 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{\text{prob}} \xi(\omega)$，那么

（1）若在引理 3（1）的条件下，有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{u\text{-prob}} M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

（2）若在引理 3（2）的条件下，有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega)) \xrightarrow{l\text{-prob}} M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

（3）若在引理 3 的条件下，有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{prob}}M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

证明 类似于定理 5.15 的证明.

定理 6.9 设$\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{prob}}\xi(\omega)$，且存在紧集$C$，使得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi_n(\omega)\in C\}=1$$

且满足引理 3 的条件（1）和条件（2）之一，则

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{prob}}M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

证明 类似于定理 5.16 的证明.

定理 6.10 设$\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{a.s}}\xi(\omega)$，那么

（1）若在引理 3（1）的条件下，有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))\xrightarrow{u\text{-a.s}}M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

（2）若在引理 3（2）的条件下，有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))\xrightarrow{l\text{-a.s}}M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

（3）若在引理 3 的条件下，有

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{a.s}}M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

证明 类似于定理 5.16 的证明.

定理 6.11 设$\xi_n(\omega)\xrightarrow{\text{a.s}}\xi(\omega)$且存在紧集$C$，使得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\omega:\xi_n(\omega)\in C\}=1$$

且满足引理 3 的条件（1）和条件（2）之一，则

$$M^{\varepsilon}(\xi_n(\omega))\xrightarrow{\text{a.s}}M^{\varepsilon}(\xi(\omega))$$

证明 仿照定理 6.9 的证明并结合定理 6.10 的证明易得.

7

参数规划最优值函数的 B-预不变凸凹性

本章利用点到集映射图的概念，提出了一种新的不变凸点到集映射和不变凹点到集映射的新概念，研究了参数规划及其特殊形式的最优值函数 B-预不变凸凹性，并讨论了最优值函数的 B-预不变凹性与其最优解集映射不变凸性之间的关系.

7.1 引言和预备知识

讨论如下形式的参数规划问题:

$$P(\varepsilon):\begin{cases}\inf\limits_{x} f(x,\ \varepsilon)\\ \text{s.t.}\ \ x\in R(\varepsilon)\end{cases}$$

这里 $f: E^n\times E^m\to E^1$, $R:\ \ E^m\to E^n$ 是点到集映射， E^m 为参数空间.

对每个给定的 $\varepsilon\in E^m$ ，$P(\varepsilon)$ 的最优解集和最优值可以看做是 ε 的函数，即有最优值函数:

$$f^*(\varepsilon)=\begin{cases}\inf\limits_{x}\left\{f(x,\ \varepsilon)\middle|x\in R(\varepsilon)\right\}, & R(\varepsilon)\neq\varnothing\\ +\infty, & R(\varepsilon)=\varnothing\end{cases}$$

最优解集点到集映射:

$$R^*(\varepsilon)=\left\{x\in R(\varepsilon)\middle|f(x,\ \varepsilon)\leqslant f^*(\varepsilon)\right\}$$

问题 $P(\varepsilon)$ 的特殊形式：

$$P_1(\varepsilon):\begin{cases}\inf\limits_x f(x,\ \varepsilon)\\ \text{s.t.}\begin{cases}g_i(x,\ \varepsilon)\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ h_j(x,\ \varepsilon)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\end{cases}\end{cases}$$

这里

$$g_i:E^n\times E^m\to E^1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

$$h_j:E^n\times E^m\to E^1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

$$R_1(\varepsilon)=\left\{x\in E^n\middle|g_i(x,\ \varepsilon)\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k;\ h_j(x,\ \varepsilon)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\right\}$$

最优值函数的凸凹性是非线性规划中灵敏度分析、稳定性分析、参数分析的重要条件，并在经济学中边际效益和影子价格等问题的研究中得到广泛的应用. 而广义凸性也在不断地被提出，如预不变凸、B-凸、ε-凸、不变凸、预拟不变凸、B-预不变凸等，用广义凸性替代通常意义上的凸性来研究参数规划最优值的特性.文献[103]系统地研究了参数规划问题最优值函数的凸凹性，文献[102]将文献[103]的研究结果拓广为预不变凸凹性，文献[104]解决了在多目标规划中如何用预不变凸函数代替凸函数的问题，文献[107]又将预不变凸函数的定义减弱到 B-预不变凸函数，研究了 B-预不变凸函数的一些性质，并举例(参见文献[107]例 2.2)说明了存在 B-预不变凸函数，且其不是预不变凸的. 有关广义凸性的相关研究也有了一些好的结果，可参见文献[105，106].

本章将文献[102]的有关研究结果拓广为 B-预不变凸凹性，并讨论了最优值函数的 B-预不变凹性与其最优解集映射不变凸性之间的关系.

令 $X\subset E^n$， E_+ 表示非负实数集，

$f:X\to E^1$

$\eta:X\times X\to E^n$， $\eta_1:E^n\times E^n\to E^n$， $\eta_2:E^m\times E^m\to E^m$

$b_i:X\times X\times[0,\ 1]\to E_+^1$， $b_i^*:X\times X\times[0,\ 1]\to E_+^1$， $i=1,\ 2$

设 $x, y \in E^n$，则

$$x \geqq y \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+m$$

$$x \geqslant y \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+m, \text{且 } x_s > y_s, \text{对某些 } s, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+m$$

$$x > y \Leftrightarrow x_i > y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+m$$

定义 7.1 设 $y \in X$，称 X 在 y 处对 η 是不变凸的，若对任意的 $x \in X$ 且 $\lambda \in [0, 1]$，有

$$y + \lambda\eta(x, y) \in X$$

称 X 为对 η 是不变凸，若 X 在任意 $y \in X$ 处对 η 是不变凸的.

定义 7.2 设 X 在 y 处对 η 是不变凸的，称函数 f 在 y 处对 η, b_1, b_2 是 B-预不变凸的，若

$$f(y + \lambda\eta(x, y)) \leqslant b_1(x, y, \lambda) f(x) + b_2(x, y, \lambda) f(y)$$
$$y \in X, \ \lambda \in [0, 1] \qquad (1)$$

其中，$b_1(x, y, \lambda) + b_2(x, y, \lambda) = 1$，$b_1(x, y, 0) = 1 = b_2(x, y, 1)$.

称函数 f 在 X 上对 η, b_1, b_2 是 $B-$预不变凸的，若函数 f 在任意 $y \in X$ 处对 η, b_1, b_2 是 B-预不变凸的. 称函数 f 对 η, b_1, b_2 是严格 B-预不变凸的，若对任意 $x, y \in X, x \neq y, \lambda \in (0, 1)$，(1) 式中严格不等号成立.

注：任意的对 η 为预不变凸函数是对 η, b_1, b_2 为 B-预不变凸函数，这里 $b_1 = \lambda$，$b_2 = 1 - \lambda$. 但反之不正确，反例参见文献[107]例 2.2.

定义 7.3 称函数 f 在 y 处对 η 是预拟不变凸的，若 X 在 y 处对 η 是不变凸的，且对任意的 $y \in X$，有

$$f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow f(y + \lambda\eta(x, y)) \leqslant f(y), \quad \lambda \in [0, 1]$$

称函数 f 在 X 上对 η 是预拟不变凸的，若函数 f 在任意 $y \in X$ 处对 η 是预拟不变凸的.

称函数 f 在 X 上对 η, b_1, b_2 是 B-预不变凹的，若函数 $-f$ 在 X 上对 η, b_1, b_2 是 B-预不变凸的；称函数 f 在 X 上对 η 是预拟不变凹的，

若函数 $-f$ 在 X 上对 η 是预拟不变凸的.

定义 7.4 称函数 f 在 X 上对 η 是预拟不变单调的，若函数 f 在 X 上对 η 是预拟不变凸的且预拟不变凹的.

7.2 最优值函数的 B-预不变凸性

为了研究最优值函数的 B-预不变凸性，首先提出新的不变凸点到集映射的概念.

定义 7.5 称点到集映射 $R: E^m \to 2^{E^n}$ 在不变凸集 $S \subset E^m$ 上对 (η_1, η_2) 为不变凸的，若点到集映射 R 的图

$$G(R) = \left\{(\varepsilon, x) \middle| x \in R(\varepsilon)\right\}$$

在 $E^n \times S$ 上对 (η_1, η_2) 是不变凸的.

称点到集映射 $R: E^m \to 2^{E^n}$ 在不变凸集 $S \subset E^m$ 上对 (η_1, η_2) 为基本不变凸的，若对所有的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S$，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$，$\lambda \in (0, 1)$，使得 $\forall x_1 \in R(\varepsilon_1)$，$x_2 \in R(\varepsilon_2)$，有

$$(x_2 + \lambda\eta_2(x_1, x_2), \varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \in G(R)$$

注：易知点到集映射 R 对 (η_1, η_2) 为不变凸的等价于：若 $x_1 \in R(\varepsilon_1)$，$x_2 \in R(\varepsilon_2)$，则有

$$x_2 + \lambda\eta_2(x_1, x_2) \in R(\varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$$

显然文献[102]中定义 3.1 是定义 7.5 中令 $\eta_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ 的情形.

定理 7.1 若函数 f 在 $\left\{(\varepsilon, x) \middle| x \in R(\varepsilon),\ \varepsilon \in S\right\}$ 上对 (η_1, η_2) 是 B-预不变凸的，且 R 在不变凸集 S 上对 (η_1, η_2) 是基本不变凸的，则参数规划问题 $P(\varepsilon)$ 的最优值函数 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是 B-预不变凸的. 其中

$$b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}}\left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)\middle| x_1\in R(\varepsilon_1), x_2\in R(\varepsilon_2)\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当} f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2)\geqslant 0 \text{ 时}, \\ \inf\limits_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}}\left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)\middle| x_1\in R(\varepsilon_1), x_2\in R(\varepsilon_2)\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{当} f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2)< 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=1-b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$$

证明 对任意固定的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2\in S$，$\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$，$\lambda\in(0, 1)$，则由函数 f 对 (η_1, η_2) 的 B-预不变凸性，R 对 (η_1, η_2) 的基本不变凸性及下确界的大小关系，有

$$\begin{aligned}
&f^*(\varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\\
&=\inf_{x\in R(\varepsilon_2+\lambda\eta_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2))} f(x, \varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\\
&\leqslant \inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} f(x_2+\lambda\eta_1(x_1, x_2), \varepsilon_2+\lambda\eta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\\
&=\inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} f((x_2, \varepsilon_2)+\lambda(\eta_1(x_1, x_2), \eta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\\
&\leqslant \inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)f(x_1, \varepsilon_1)+b_2((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)f(x_2, \varepsilon_2)\\
&=\inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)f(x_1, \varepsilon_1)+(1-b_2((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda))f(x_2, \varepsilon_2)\\
&=\inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)(f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2))+f(x_2, \varepsilon_2)\\
&\leqslant \inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)(f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2))+f(x_2, \varepsilon_2)\\
&=\inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}} b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)(f(x_1, \varepsilon_1)+(1-b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda))f(x_2, \varepsilon_2)\\
&=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+(1-b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda))f^*(\varepsilon_2)\\
&=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda))f^*(\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

注意到

$$0 \leqslant b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda) \leqslant 1$$

且

$$b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), 0) = 1 = b_2((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), 1)$$

由上、下确界的性质，有

$$0 \leqslant b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \leqslant 1 \quad 且 \quad b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) = 1 = b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$$

故 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是 B-预不变凸的.

定理 7.2　若函数 f 在 $\{(\varepsilon, x) | x \in R(\varepsilon), \varepsilon \in S\}$ 上对 (η_1, η_2)，b_1, b_2 是严格 B- 预不变凸的，R 在不变凸集 S 上对 (η_1, η_2) 是基本不变凸的，且 $S^*(\varepsilon) \neq \varnothing, \forall \varepsilon \in S$，则参数规划问题 $P(\varepsilon)$ 的最优值函数 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是严格 B-预不变凸的. 其中

$$b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x_1 \in R(\varepsilon_1) \\ x_2 \in R(\varepsilon_2)}} \{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda) | x_1 \in R(\varepsilon_1), x_2 \in R(\varepsilon_2)\}, \\ \qquad\qquad 当 f(x_1, \varepsilon_1) - f(x_2, \varepsilon_2) \geqslant 0 时, \\ \inf\limits_{\substack{x_1 \in R(\varepsilon_1) \\ x_2 \in R(\varepsilon_2)}} \{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda) | x_1 \in R(\varepsilon_1), x_2 \in R(\varepsilon_2)\}, \\ \qquad\qquad 当 f(x_1, \varepsilon_1) - f(x_2, \varepsilon_2) < 0 时, \end{cases}$$

$$b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 1 - b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$$

证明　对任意固定的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S$，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$，$\lambda \in (0, 1)$，令 $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，由 $S^*(\varepsilon) \neq \varnothing, \forall \varepsilon \in S$，则存在 $x_1^* \in S^*(\varepsilon_1) \subset R(\varepsilon_1)$，$x_2^* \in S^*(\varepsilon_2) \subset R(\varepsilon_2)$，由函数 f 对 (η_1, η_2) 的严格 B-预不变凸性，R 对 (η_1, η_2) 的基本不变凸性及下确界的大小关系，有

$$\begin{aligned} & b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) f^*(\varepsilon_1) + b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) f^*(\varepsilon_2) \\ = & b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) f(x_1^*, \varepsilon_1) + b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) f(x_2^*, \varepsilon_2) \\ \geqslant & b_1((x_1^*, \varepsilon_1), (x_2^*, \varepsilon_2), \lambda) f(x_1^*, \varepsilon_1) + b_2((x_1^*, \varepsilon_1), (x_2^*, \varepsilon_2), \lambda) f(x_2^*, \varepsilon_2) \\ > & f(x_2^* + \lambda\eta_1(x_1^*, x_2^*), \varepsilon_2 + \lambda\eta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \\ \geqslant & \inf_{\substack{x_1 \in R(\varepsilon_1) \\ x_2 \in R(\varepsilon_2)}} f(x_2 + \lambda\eta_1(x_1, x_2), \varepsilon_2 + \lambda\eta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \end{aligned}$$

$$\geqslant \inf_{x\in R(\varepsilon_\lambda)} f(x,\ \varepsilon_\lambda)=f^*(\varepsilon_\lambda)=f^*(\varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2))$$

注意到定理 7.1 的证明过程，易知

$$0\leqslant b_1^*(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \lambda)\leqslant 1 \quad 且 \quad b_1^*(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ 0)=1=b_1^*(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ 1)$$

故 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是严格 B-预不变凸的.

定理 7.3　若函数 f 在 $\{(\varepsilon,\ x)|x\in R(\varepsilon),\ \varepsilon\in S\}$ 上对 $(\eta_1,\ \eta_2)$，b_1, b_2 是 B-预不变凸的，且 $g_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 和 $h_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 在 $\{(\varepsilon,\ x)|x\in R(\varepsilon),\ \varepsilon\in S\}$ 上对 $(\eta_1,\ \eta_2)$ 分别是预拟不变凹的和预拟不变单调的，则参数规划问题 $P_1(\varepsilon)$ 的最优值函数 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是 B-预不变凸的.

证明　注意到

$$G(R_1)=\left\{x\in E^n\,\middle|\,g_i(x,\ \varepsilon)\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\cdots,\ k;\ h_j(x,\ \varepsilon)=0,\ j=1,\ 2,\cdots,\ p.\right\}$$

仿照文献[102]的定理 3.4 的证明过程，再利用定理 7.1 易知结论成立.

定理 7.4　若函数 f 在 $\{(\varepsilon,\ x)|x\in R(\varepsilon),\ \varepsilon\in S\}$ 上对 $(\eta_1,\ \eta_2)$，b_1, b_2 是严格 B-预不变凸的，$g_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 和 $h_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 在 $\{(\varepsilon,\ x)|x\in R(\varepsilon),\ \varepsilon\in S\}$ 上对 $(\eta_1,\ \eta_2)$ 分别是预拟不变凹的和预拟不变单调的，且 $S^*(\varepsilon)\neq\varnothing,\ \forall\varepsilon\in S$，则参数规划问题 $P_1(\varepsilon)$ 的最优值函数 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是严格 B-预不变凸的.

证明　利用定理 7.2，类似于定理 7.3 的证明.

7.3　最优值函数的 B-预不变凹性

这一节我们给出了不变凹点到集映射新的概念，研究了最优值函数的 B-预不变凹性.

定义 7.6 称点到集映射 $R:E^m \to 2^{E^n}$ 在不变凸集 $S \subset E^m$ 上对 (η_1, η_2) 为不变凹的，若点到集映射 R 的余图

$$G(R)^c = \left\{(x, \varepsilon) \middle| x \notin R(\varepsilon)\right\}$$

在 $E^n \times S$ 上对 (η_1, η_2) 是不变凸的.

注：易知点到集映射 R 的余图 $G(R)^c = \left\{(x, \varepsilon) \middle| x \notin R(\varepsilon)\right\}$ 对 (η_1, η_2) 是不变凸的等价于：若 $x_2 + \lambda\eta_2(x_1, x_2) \in R(\varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$，则

$$x_1 \in R(\varepsilon_1) \quad 或 \quad x_2 \in R(\varepsilon_2).$$

显然文献[102]中定义 4.1 是包含在定义 7.6 中令 $\eta_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ 的情形.

定理 7.5 若函数 f 在 $E^n \times S$ 上对 (η_1, η_2)，b_1, b_2 是 B-预不变凹的，且 R 在不变凸集 S 上对 (η_1, η_2) 是不变凹的，则参数规划问题 $P(\varepsilon)$ 的最优值函数 f^* 在 S 上对 η_2，b_1^*，b_2^* 是 B-预不变凹的. 其中

$$b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = \begin{cases} \inf\limits_{\substack{x_1 \in R(\varepsilon_1) \\ x_2 \in R(\varepsilon_2)}} \left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda) \middle| x_1 \in R(\varepsilon_1)或x_2 \in R(\varepsilon_2)\right\}, \\ \qquad\qquad 当\ f(x_1, \varepsilon_1) - f(x_2, \varepsilon_2) \geqslant 0\ 时 \\ \sup\limits_{\substack{x_1 \in R(\varepsilon_1) \\ x_2 \in R(\varepsilon_2)}} \left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda) \middle| x_1 \in R(\varepsilon_1)或x_2 \in R(\varepsilon_2)\right\}, \\ \qquad\qquad 当\ f(x_1, \varepsilon_1) - f(x_2, \varepsilon_2) < 0\ 时 \end{cases}$$

$$b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) = 1 - b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$$

证明 对任意固定的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S$，$\lambda \in (0, 1)$，则由函数 f 对 (η_1, η_2) 的 B-预不变凹性，点到集映射 R 对 (η_1, η_2) 的不变凹性及下确界的大小关系，有

$$\begin{aligned} & f^*(\varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \\ = & \inf_{x \in R(\varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))} f(x, \varepsilon_2 + \lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \\ \geqslant & \inf_{\substack{x_1 \in R(\varepsilon_1) \\ 或x_2 \in R(\varepsilon_2)}} f(x_2 + \lambda\eta_1(x_1, x_2), \varepsilon_2 + \lambda\eta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \end{aligned}$$

$$\geqslant \inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ 或x_2\in R(\varepsilon_2)}} b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)(f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2))+f(x_2, \varepsilon_2)$$

$$\geqslant b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda) \inf_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ 或x_2\in R(\varepsilon_2)}} (f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2))+\inf_{x_2\in R(\varepsilon_2)} f(x_2, \varepsilon_2)$$

$$=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+(1-b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda))f^*(\varepsilon_2)$$

$$=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda))f^*(\varepsilon_2)$$

注意到定理 7.1 的证明过程，易知

$$0\leqslant b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)\leqslant 1, \quad b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)=1=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$$

故 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是 B-预不变凹的.

定理 7.6 若函数 f 在 $E^n\times S$ 上对 (η_1, η_2)，(η_1, η_2) 是严格 B-预不变凹的，R 在不变凸集 S 上对 (η_1, η_2) 是不变凹的，且 $S^*(\varepsilon)\neq\varnothing, \forall\varepsilon\in S$，则参数规划问题 $P(\varepsilon)$ 的最优值函数 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是严格 B-预不变凹的. 其中

$$b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=\begin{cases}\inf\limits_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}}\left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)\middle|x_1\in R(\varepsilon_1)\text{ 或 }x_2\in R(\varepsilon_2)\right\}, \\ \qquad\qquad\text{当}f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2)\geqslant 0\text{ 时}\\ \sup\limits_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}}\left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)\middle|x_1\in R(\varepsilon_1)\text{ 或 }x_2\in R(\varepsilon_2)\right\}, \\ \qquad\qquad\text{当}f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2)<0\text{ 时}\end{cases}$$

$$b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=1-b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)$$

证明 对任意固定的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2\in S$，$\lambda\in(0, 1)$，令 $\varepsilon_\lambda=\varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，由 $S^*(\varepsilon)\neq\varnothing, \forall\varepsilon\in S$，则有

$$x^*\in S^*(\varepsilon_\lambda)\subset R(\varepsilon_\lambda)$$

再由点到集映射 R 对 (η_1, η_2) 的不变凹性，于是存在 $x_1^*\in R(\varepsilon_1)$ 或 $x_2^*\in R(\varepsilon_2)$，使得

$$x^* = x_2^* + \lambda\eta_1(x_1^*, x_2^*)$$

注意到函数 f 对 (η_1, η_2) 的严格 B-预不变凹性，于是

$$\begin{aligned}
&b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_2)\\
&=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)\inf_{x_1\in R(\varepsilon_1)}f(x_1, \varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)\inf_{x_2\in R(\varepsilon_2)}f(x_2, \varepsilon_2)\\
&\leqslant b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f(x_1^*, \varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda))f(x_2^*, \varepsilon_2)\\
&< f(x_2^*+\lambda\eta_2(x_1^*, x_2^*), \varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\\
&= f(x^*, \varepsilon_\lambda) = f^*(\varepsilon_\lambda) = f^*(\varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))
\end{aligned}$$

注意到定理 7.1 的证明过程，易知

$$0\leqslant b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)\leqslant 1, \quad b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)=1=b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$$

故 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是严格 B-预不变凹的.

7.4　最优值函数的 B-预不变凹性与其最优解集映射的不变凸性之间的关系

对于一般的参数规划问题 $P(\varepsilon)$，我们给出了最优值函数的 B-预不变凹性与其最优解集的不变凸性之间的关系.

定理 7.7　对每个固定的 $\varepsilon\in S$，设函数 f 关于 x 对 η，b_1, b_2 是 B-预不变凸的，且 R 在 S 上对 η 是不变凸值的(即 $R(\varepsilon)$ 是不变凸集)，S 是任意集，则问题 $P(\varepsilon)$ 的最优解集 R^* 对 η 是不变凸值的.

证明　对每个固定的 $\varepsilon\in S$，设 $x_1, x_2\in R^*(\varepsilon)\subset R(\varepsilon)$，由 R 在 S 上对 η 是不变凸值的，则

$$f(x_i, \varepsilon)\leqslant f^*(\varepsilon), i=1, 2 \quad 且 \quad x_2+\lambda\eta(x_1, x_2)\in R(\varepsilon)$$

利用函数 f 关于 x 对 η，b_1, b_2 的 B-预不变凸性，有

$$
\begin{aligned}
f(x_2+\lambda\eta(x_1, x_2), \varepsilon) &\leqslant b_1 f(x_1, \varepsilon)+b_2 f(x_2, \varepsilon) \\
&\leqslant b_1 f^*(\varepsilon)+b_2 f^*(\varepsilon)=f^*(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

于是

$$
x_2+\lambda\eta(x_1, x_2)\in R^*(\varepsilon)
$$

即 $P(\varepsilon)$ 的最优解集 R^* 对 η 是不变凸值的.

定理 7.8 设函数 f 在 $\{(\varepsilon, x)|x\in R(\varepsilon), \varepsilon\in S\}$ 上对 (η_1, η_2)，b_1, b_2 是 B-预不变凸的，R 在 S 上对 (η_1, η_2) 是不变凸的，S 是任意集，且 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是 B-预不变凹的，则问题 $P(\varepsilon)$ 的最优解集映射 R^* 对 (η_1, η_2) 是不变凸的. 其中

$$
b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=\begin{cases}
\sup\limits_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}}\left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)\middle|x_1\in R(\varepsilon_1), x_2\in R(\varepsilon_2)\right\}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2)\geqslant 0 \text{ 时} \\
\inf\limits_{\substack{x_1\in R(\varepsilon_1)\\ x_2\in R(\varepsilon_2)}}\left\{b_1((x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), \lambda)\middle|x_1\in R(\varepsilon_1), x_2\in R(\varepsilon_2)\right\}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } f(x_1, \varepsilon_1)-f(x_2, \varepsilon_2)<0 \text{ 时}
\end{cases}
$$

$$
b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)=1-b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)
$$

证明 设

$$
(x_i, \varepsilon_i)\in G(R^*)=\{(x, \varepsilon)\mid f(x, \varepsilon)\leqslant f^*(\varepsilon)\}\subset G(R)\quad (i=1, 2),
$$

则

$$
f(x_i, \varepsilon_i)\leqslant f^*(\varepsilon_i), \quad i=1, 2
$$

由 R 在 S 上对 (η_1, η_2) 的不变凸性，有

$$
(x_2+\lambda\eta_2(x_1, x_2), \varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))\in G(R)
$$

利用函数 f 在 $\{(\varepsilon, x)|x\in R(\varepsilon), \varepsilon\in S\}$ 上对 (η_1, η_2)，b_1, b_2 的 B-预不变凸性及定理 7.1 的证明过程，有

$$
\begin{aligned}
&f(x_2+\lambda\eta_2(x_1, x_2), \varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \\
&\leqslant b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_2)
\end{aligned}
$$

又 f^* 在 S 上对 η_2, b_1^*, b_2^* 是 B-预不变凹的，则

$$b_1^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_1)+b_2^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda)f^*(\varepsilon_2) \leqslant f^*(\varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$$

于是

$$f(x_2+\lambda\eta_2(x_1, x_2), \varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \leqslant f^*(\varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$$

故

$$(x_2+\lambda\eta_2(x_1, x_2), \varepsilon_2+\lambda\eta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \in G(R^*)$$

由定义 7.5 知， $P(\varepsilon)$ 的最优解集映射 R^* 对 (η_1, η_2) 是不变凸的.

参 考 文 献

[1] 王金德. 随机规划. 南京：南京大学出版社，1990.
[2] V. Kankova. A note on estimates in stochastic programming. J. Computer. Appl. Math., 1994, 56(1): 97-112.
[3] S. Vogel. A stochastic approach to stability in stochastic programming. Journal of Computational Applied Mathematics, 1994, 56(1): 65-96.
[4] P. Kall. Approximation to optimization problems: an elementary review. Mathematics of Operations Research, 1986, 11(1): 9-18.
[5] 王金德. 关于上图收敛性理论的一些结果. 高校应用数学学报，1988，3(4)：520-526.
[6] J. R. Birge, R. J-B. Wets. Designing approximation schemes forstochastic optimization problems, in particular for stochastic programs with recourse. Mathematical Programming Study, 1986, 27(1): 54-102.
[7] S. M. Robinson. Local epi-continuity and local optimization. Math. Prog., 1987, 37(2): 208-223.
[8] J. Dupacova, R. J-B. Wets. Asymptotic behavior of statistical estimators and of optimal solutions of optimization problems. The Annals of Statistics, 1988, 16(4): 1517-1549.
[9] 万仲平. 关于二层规划的逼近问题. 系统科学与数学，2000，43(1)：289-294.
[10] 万仲平，吴国民，陈开周.一类二层规划的上图收敛. 运筹学学报，1998，4(2)：48-52.
[11] S. M. Robinson. Analysis of sample-path optimization. Math. Oper. Res., 1996, 21(3): 513-528.
[12] Z. Artstein , R. J-B. Wets. Stability results for stochastic programs and sensor , allowing for discontiuous objective

functions. SIAM Journal on Optimization, 1994, 4(3): 537-550.

[13] G. Salinetti. Consistency of statistical estimators: the epigraphical view. Stochastic Optimization: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001: 365-383.

[14] C. J. Geyer. On the asymptotic of constrained M-estimation. The Ann. Stat., 1994, 22(4): 1993-2010.

[15] C. Hess. Epi-convergence of sequences of normal integrands and strong consistency of the maximum likelihood estimator. The Annals of Statistics, 1996, 24(3): 1298-1315.

[16] 万仲平，陈开周. 二阶段补偿随机规划问题的一种次梯度聚类近似算法. 西安电子科技大学学报，1994，21(3)：302-307.

[17] 万仲平，纪昌明，陈开周. 求解单阶段随机规划的一种光滑逼近法. 数学研究与评论，1997，17(4)：565-569.

[18] 万仲平. 单阶段随机规划的一种近似精确罚函数法. 工程数学学报，1996，13(4)：37-42.

[19] 霍永亮，刘三阳. 函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理. 兰州大学学报，2005，41(6)：125-129.

[20] 霍永亮，刘三阳. 函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的控制收敛定理. 四川大学学报，2006，43(5)：948-954.

[21] 霍永亮，刘三阳. 随机规划逼近最优解集的上半收敛性. 西安电子科技大学学报，2005，32(6)：953-957.

[22] Z. Artstein, R. J-B. Wets. Consistency of minimizes and the SLLN for stochastic programs. Journal Convex Analysis, 1995, 2(1): 1-17.

[23] M. Zervos. On the epiconvergence of stochastic optimization problems. Mathematics of Operations Research, 1999, 24(2): 495-508.

[24] 赵天绪，郝跃，李宏涛. 随机规划中的一些逼近结果. 纯粹数学与应用数学，1998，14(1)：39-43.

[25] P. Kall. Approximations to stochastic programs with complete recourse. Numerische Mathematik, 1974, 22(2): 333-339.

[26] P. Kall. Stochastic linear programs. Berlin: Springer, 1976.

[27] R. J-B. Wets. A statistical approach to the solution of stochastic

programs with (convex) simple recourse. Working Paper, Department of Mathematics, University of Kentucky, Lexington, 1979.

[28] J. Dupacova. Stability and sensitivity analysis for stochastic programming. Ann. Oper. Res., 1990, 27(1): 115-142.

[29] R. Schultz. Some aspects of stability in stochastic programming. Ann. Oper. Research, 2000, 100(1): 55-84.

[30] B. Bereanu. Stable stochastic linear programs and applications. Mathematischen Operations for Schung and Statistik, 1975, 6(4): 593-607.

[31] V. Kankova. Stability in the stochastic programming. Kybernetika, 1978, 14(2): 339-349.

[32] J. Dupacova. Stability in stochastic programming with recourse-estimated parameters. Math. Prog., 1984, 28(1): 72-83.

[33] J. Wang. Distribution sensitivity analysis for stochastic programs with complete recourse. Math. Prog., 1985, 31(2): 286-297.

[34] A. Shapiro. Asymptotic properties of statistical estimators in stochastic programming. Annals of Statistics, 1989, 17(3): 841-858.

[35] S. M. Robinson, R. J-B. Wets. Stability in two-stage stochastic programming. SIAM J. Cont. Optim., 1987, 25(6): 1409-1416.

[36] J. Wang. Continuity of the feasible solution sets of probabilistic constrained programs. JOTA, 1989, 63(1): 79-89.

[37] S. Vogel. On stability in multiple objective programming-A stochastic approach. Math. Prog., 1992, 56(1): 91-119.

[38] R. Schultz. On structure and stability in stochastic programs with random technology matrix and complete integer recourse. Math. Prog., 1995, 70(1): 73-89.

[39] J. Wang. Stability of multistage stochastic programming. Ann. Oper. Res., 1995, 56(2): 313-322.

[40] M. Riis, R. Schultz. Applying the minimum risk criterion in stochastic recourse programs. Computational Optimization and Applications, 2003, 24(2): 267-287.

[41] W. Romisch. On convergence rates of approximations in stochastic programming. Math. Optim. 1986, 80(1): 82-91.

[42] W. Romisch, R. Schultz. Distribution sensitivity in stochastic programming. Math. Prog., 1991, 50(1): 197-226.

[43] W. Romisch, R. Schultz. Stability of solutions for stochastic programs with complete recourse. Math. Oper. Res., 1993, 18(3): 590-609.

[44] W. Romisch, R. Schultz. Lipschitz stability for stochastic programs with complete recourse. SIAM Journal on Optimization, 1996, 6(3): 531-547.

[45] Z. Artstein. Sensitivity with respect to the underlying information in stochastic programs. J. Comp. Appl. Math. 1994, 56(1): 127-136.

[46] V. Kankova. A note on multifunction in stochastic programming. Stochastic programming methods and technical applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1998, pp.154-168.

[47] A. Shapiro. Quantitative stability in stochastic programming. Math. Prog., 1994, 67(1): 99-108.

[48] R. Schultz. Rates of convergence in stochastic programs with complete recourse. SIAM Journal on Optimization, 1996, 6(4): 1138-1152.

[49] R. Henrion, W. Romisch. Metric regularity and quantitative stability in stochastic programs with probabilistic constraints. Math. Prog., 1999, 84(1): 55-88.

[50] D. Dentcheva. Regular castaing representations of multifunctions with applications to stochastic programming. SIAM J. Optim. 2000, 10(3): 732-749.

[51] S. T. Rachev, W. Römisch. Quantitative stability in stochastic programming: the method of probability metrics. Math. Oper. Res., 2002, 27(4): 792-818.

[52] J. R. Birge, L. Qi. Subdifferential convergence in stochastic programs. SIAM J. Optim.. 1995a, 5(2): 436-453.

[53] A. Shapiro. On concepts of directional differentiability. Journal Optim. Theory and Appl., 1990, 66(3): 477-487.

[54] A. Shapiro. Statistical inference of stochastic optimization

problems.(S. P. Uryasev , Editor) Probabilistic constrained optimization : theory and applications. Kluwer Academic Publishers, 2000: 251-262.

[55] A. J. King. Generalized delta theorems for multivalued mappings and measurable selections. Mathematics of Operations Research, 1989, 14(4): 720-736.

[56] A. J. King, R. T. Rockafellar. Asymptotic theory for solutions in statistical estimation and stochastic programming. Mathematics of Operations Research, 1993, 18(1): 148-162.

[57] G. Pflug. Asymptotic stochastic programs. Math. Oper. Res., 1996, 20(4): 769-789.

[58] N. Growe. Estimated stochastic programs with chance constraints. Eur. J. Oper. Res. 1997, 101(2): 285-305.

[59] G. Pflug, A. Ruszczynski and Schultz, R. On the Glivenko-Cantelli problem in stochastic programs: linear recourse and extensions. Mathematics of Operations Research, 1998, 23(1): 204-220.

[60] L.A. Korf and R.J.-B. Wets. Random-lsc functions: an ergodic theorem. Math. Oper. Res., 2001, 26(2): 421-445.

[61] G.Salinetti, R. J-B. Wets. On the convergence in distribution of measurable multifunctions , normal integrands , stochastic processes and stochastic infima. Mathematics of Operations Research, 1986, 11(3): 385-419 .

[62] S. Dolecki, G. Salinetti and R. J-B. Wets. Convergence of functions: Equi-semicontinuity. Transactions of the American Mathematical Society, 1983, 276(1): 409-429.

[63] G. Salinetti, R. J-B. Wets. On the convergence of closed-valued measurable multifunctions. Transactions of the American Mathematical Society, 1981, 266(1): 275-289.

[64] R. Lucchetti,G. Salinetti and R. J-B. Wets. Uniform convergence of probability measures : topological criteria. Journal of Multivariate Analysis, 1994, 51(2): 252-264.

[65] 骆建文，鲁世杰．概率约束规划的稳定性分析．高校应用数学

学报 A 辑，2001，16(1)：119-124.

[66] 骆建文，鲁世杰. 随机规划逼近解的收敛性. 浙江大学学报（理学版），2000，27(5)：493-497.

[67] 马江洪. 概率约束下最优解的统计影响函数. 应用数学，1999，12(1)：56-60.

[68] 古福文. 一类概率约束规划的近似方法及其收敛性. 四川大学学报（自然科学版），1997，34(4)：399-405.

[69] 王立洪. 带有相依样本的随机规划问题的渐近性态. 应用数学学报，1999，22(1)：78-83.

[70] 陈志平，徐成贤. 一般形式多阶段有补偿问题的广义对偶理论. 数学研究与评论，1997，17(2)：276-286.

[71] 陈志平，林卫东，徐成贤. 一般多阶段有补偿问题的间接单阶段化及其应用. 工程数学学报，1998，15(4)：69-75.

[72] Lihong Wang. Asymptotic of statistical estimates in stochastic programming problems with long-range dependent samples. Math. Meth. Oper. Res.，2002，55(1)：37-54.

[73] 李兴斯. 某类不可微优化问题的一个有效方法. 中国科学（A 辑），1994，24 (4)：371-377.

[74] 李兴斯. 凸规划问题的极大熵方法. 中国科学（A 辑），1994，39(8)：682-684.

[75] A. Shapiro，Y. Wardi. Convergence analysis of stochastic algorithms，Math. Oper. Res，1996，21(3)：615-628.

[76] Chen zhiping. On the convergence of sampling algorithms for solving dynamic stochastic programming. Systems Science and Mathematical Sciences，2000，13(4)：387-406.

[77] 孙德锋，王金德. 一种解带有补偿随机规划的逼近法. 计算数学，1994，45(5)：12-19.

[78] Zhongping Wang，Guoming Wu. An approximation method for probabilistic constrained stochastic programming and its efficiency solution scheme. OR Transactions，2002，6(3)：35-41.

[79] 王金德. 用随机规划方法寻求线性回归模型小样本 L_1-估计量的分布. 应用数学学报，1996，19(4)：576-581.

[80] 李华贵，张文修. 随机集序列在拓扑意义下收敛定理. 科学通

报，1987，32(2)：88-90.
[81] 张文修，汪振鹏，高勇. 集值随机过程. 北京：科学出版社，1996.
[82] 高勇，张文修. 超空间上的选择算子理论与集值随机过程. 中国科学（A 辑），1994，2 4(2)：113-121.
[83] 张文修，聂赞坎，高勇. 集值随机过程一般理论与集值鞅. 工程数学学报，1991，8(3)：1-20.
[84] 吴伟志. 集合序列的收敛性关系. 数学杂志，1995，15(4)：469-475.
[85] 吴伟志，张文修. 数值函数关于集值测度的积分的极限定理. 应用数学学报，2002，25(1)：108-111.
[86] 向淑文. 关于上半连续集值映像的连续选择问题. 数学学报，2000，43(2)：329-336.
[87] 陈志平，高勇. 带随机过程的随机规划问题最优解集的过程特性与稳定性. 应用数学学报，1997，20(3)：466-472.
[88] 陈志平，高勇. 带随机过程的随机规划问题最优解过程的平稳性与马氏性. 纯粹数学与应用数学，1996，12(1)：88-92.
[89] 高勇，陈志平. 带随机过程的随机规划问题——最优值过程和最优解集过程的鞅性. 数学杂志，1997，17(3)：335-338.
[90] 张文修，高勇. 集值上鞅的收敛定理及 Riesz 分解. 数学学报，1992，35(1)：112-120.
[91] 霍永亮，刘三阳. 停止变换的不变性. 数学杂志，2004，24(6)：610-614.
[92] 霍永亮，刘三阳. 随机规划逼近问题最优解集的稳定性. 数学学报，2009，52 (5)：911-918.
[93] B. S. Mordukhovich. Complete characterization of openness, metric regularity and Lipschitzian properties of multifunctions. Trans. Am. Math. Soc., 1993, 34(1): 1-35.
[94] B. S. Mordukhovich. Generalized differential calculus for nonsmooth and set-valued mappings. J. Math. Anal. Appl., 1994, 18(3): 250-288.
[95] B. S. Mordukhovich. Lipschitzian stability of constraint systems and Generalized equation. Nonlinear Analysis, Methods and

Application, 1994, 22(2): 173-206.

[96] J. P. Penot. Metric regularity, openness and Lipschitzian behavior of multifunctions. Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl. 1989, 13(6): 629-643.

[97] H. Attouch, R. J-B. Wets. Quantitative stability of variational systems Ⅱ: a framework for nonlinear conditioning. SIAM J. Optim., 1993, 3(2): 359-381.

[98] H. Attouch, R. J-B. Wets. Quantitative stability of variational systems Ⅰ: the epigraphical distance. Transactions of the American Mathematical Society, 1991, 328(2): 695-729.

[99] 王金德. 随机规划目标函数微分稳定性. 应用数学学报, 1991, 14(4): 484-490.

[100] 骆建文, 王金德. 随机规划的弱微分性. 高校应用数学学报, 1997, 12(1): 53-62.

[101] D. Dentcheva, W. Romisch. Differential stability of two-stage stochastic programs. SIAM J. Optim., 2000, 11(1): 87-112.

[102] 张庆祥, 张璞. 参数非线性规划中最优值函数的预不变凸凹性. 运筹学学报, 2000, 4(4): 12-20.

[103] A. V. Fiacc, J. Kyparisis. Convexity and concavity properties of optimal value function in parametric nonlinear programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 1986, 48(1): 95-126.

[104] T. Weir, B. Mond. Preinvex functions in multiple objective optimization. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(1): 29-38.

[105] C. R. Bector, Singh. B-Vex functions. Journal of Optimization Theory and Applications, 1991, 71(2): 237-253.

[106] 游兆永, 安和平. 参数规划中最优值函数的凹凸性. 应用数学, 1991, 4(3): 19-22.

[107] S. K. Saneja, Singh and C. R. Bector. Generalization of preinvex and B-Vex functions. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 476(1): 577-587.

[108] 霍永亮，刘三阳. 非线性参数规划问题ε-最优解集集值映射的连续性. 系统科学与数学，2009，29（6）：735-741.
[109] 林潼. 参数规划最优值函数的近似凸性及其有界性. 四川大学学报，2001，38(4)：549-590.
[110] B. Bank，J. Guddat，Klatte D.et al. Non-linear parametric optimization. Berlin：Akademie Verlag，1983.
[111] 王先甲，王秋庭，冯尚友. 非可微参数规划极值函数方向导数的表示. 数学杂志，1995，15(4)：530-538.
[112] R. J-B. Wets. Lipschitz continuity of inf-projections. Computer. Optim. Appl.，2003，25(2)：269-282.
[113] 霍永亮，刘三阳. 参数规划最优值函数的 B-预不变凸凹性. 工程数学学报，2005，23(5)：919-922.
[114] R. T. Rockafellar. Convex analysis. Princeton，New Jersey：Princeton University Press，1997.
[115] P. Billingsley. Convergence of probability measures. New York：Jonh Wiley，1968.
[116] 王寿仁. 概率论与随机过程. 北京：科学出版社，1997.
[117] 林正炎，陆传荣，苏中根. 概率极限理论基础. 北京：高等教育出版社，1999.
[118] 严加安. 测度与积分. 西安：陕西师范大学出版社，1988.
[119] 严加安. 测度论讲义. 北京：科学出版社，1998.
[120] 史及民. 离散鞅及其应用. 北京：科学出版社，1999.
[121] E. Polak，R. J-B. Wets and A. Kiureghian. On an approach to optimization problems with a probabilistic cost and or constraints. Nonlinear Optimization and Applications，1998，2(1)：1-17.
[122] 李雷，吴从炘. 集值分析. 北京：科学出版社，2003.
[123] 张从军. 集值分析与经济数学. 北京：科学出版社，2004.
[124] Dupatcovsa J，Growe-Kuska N，Romisch W. Scenario reduction in stochastic programming：An approach using probability metrics. Mathematical Programming，2003，95(3)，493-511.
[125] Pennanen T，Koivu M. Epi-convergent discretizations of

stochastic programs via integration quadratures. Numerische Mathematik, 2005, 100(1): 141-163.

[126] Teemu Pennanen. Epi-Convergent discretizations of multistage stochastic programs. Mathematics of Operations Research, 2005, 30 (1): 245-256.

符 号 说 明

$\mathbf{N}$: 自然数集

$\mathbf{R}$: 实数集

R^d: d 维欧氏空间

$\subset$: 包含于

$\in$: 属于

$\notin$: 不属于

$\bigcap$: 交

$\bigcup$: 并

$\Rightarrow$: 蕴涵，推出

$\forall$: 任意

$\exists$: 存在

$\Leftrightarrow$: 等价于，当且仅当

$\varnothing$: 空集

$\equiv$: 恒等于

$\backslash$: 差集符号

$\leqslant$, $\geqslant$: 小于等于，大于等于

$f: E \to \mathbf{R}$ 度量空间 E 上的函数

a.s.: 几乎处处

max: 取最大

min: 取最小

E: 期望算子

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$: 概率空间

ξ: 概率空间（Ω, $\mathscr{F}$, P）上的 m 维随机向量

(E, d): 以 d 为距离的度量空间

$C_b(E)$: 度量空间 E 上的有界连续函数全体

$B(x,\delta)$: 度量空间 E 上的中心为 x，半径为 δ 的邻域

$\mathscr{B}(E)$: E 中的 Borel 子集全体

$\mathscr{P}(E)$：定义在 $\mathscr{B}(E)$ 上取值在 [0, 1] 的概率测度全体

$\{\mu_0;\mu_n:n\in\mathbf{N}\}$：$\mathscr{P}(E)$ 上的概率测度族

cont μ：概率测度 μ 的 μ-连续集全体

$\mathscr{F}(E)$：E 中的闭子集全体

$G(E)$：E 中的开子集全体

A°：可测集 A 的内部

cl$A$：可测集 A 的闭包

∂A：可测集 A 的边界

A^c：可测集 A 的余集

$\{A;\ A_n,\ n\in\mathbf{N}\}$：$B(E)$ 中的可测集族

$I_A(x)$：A 的示性函数

$\mathscr{B}(R^m)$：R^m 中的 Borel 子集全体

$\mathscr{P}(R^m)$：定义在 $\mathscr{B}(R^m)$ 上取值在 [0, 1] 的 Borel 概率测度全体

$d(x, C)$：R^m 中点 x 到集合 C 的距离函数

$e(A, B)$：R^m 中集合 A 到集合 B 的上半距离

$P_f(R^m)$：R^m 中的非空闭子集全体

$P_k(R^m)$：R^m 中的非空紧子集全体

$\xrightarrow{\text{epi}}$：上图收敛

$\xrightarrow{w}$：弱收敛

$\xrightarrow{r}$：正则收敛

$\xrightarrow{R}$：弱正则收敛

$\xrightarrow{d}$：分布收敛

$\xrightarrow{\text{prob}}$：概率收敛

$\xrightarrow{\text{a.s}}$：几乎处处收敛

$\{x_n\}$：度量空间中的点列

$x_n\to x$：点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$：点列 $\{x_n\}$ 的极限

limsup：上极限

liminf：下极限

[General Information]
书名=随机规划稳定性理论
作者=霍永亮著
页数=166
SS号=12488874
DX号=
出版日期=2010.01
出版社=西南交通大学出版社